

LEY DE ROTURA
DE LOS MATERIALES SÓLIDOS

POR: ***JAIME MARTINEZ.***

Ingeniero de Minas y Metalurgia.

"Y, al principio, todo fue curiosidad"

Isaac Asimov, Introducción a la Ciencia

El Universo es Unívoco y Dual

¿Lao Tsé ¿

INTRODUCCION.

Durante varios siglos los investigadores en el campo de la Ingeniería han intentado saber qué sucede al interior de los cuerpos sólidos y por qué rompen cuando son sometidos a las fuerzas externas que le son impuestas y para ello han propuesto formulaciones empíricas o CRITERIOS que pudieran explicar los fenómenos observados.

Entre los más conocidos y dignos de mencionar se encuentran los de H. tresca, Griffith, Von Misses, E. C. Robertson, Navier y muchos otros investigadores del tema.

Estos criterios de falla, que se han denominado “ Clásicos”, han estado basados en las siguientes teorías:

- Del Esfuerzo Principal máximo.
- Del Esfuerzo Máximo Cortante desarrollado.
- De la Deformación Principal Máxima.
- De la Deformación Máxima de Energía desarrollada.

De igual manera se han reconocido como válidas las teoría de las Deformaciones Elásticas (basadas en la Ley de Hook) y Plásticas, que son las más utilizadas en la actualidad, acompañadas de la de los Elementos Finitos.

En el presente escrito se pretende enunciar una nueva formulación de la Teoría de Falla de los materiales sólidos tomando como base las teorías de Coulomb y Mohr y compatibilizándolas.

CAPÍTULO I

I.1.- GENERALIDADES Y OBJETIVO DE LA INVESTIGACION.

Para la humanidad, la *utilidad* de un material se define en función de *calidad*.

Desde la óptica de la Ingeniería, la *calidad* de los materiales sólidos se mide en términos de *resistencia a fallar* por la acción de todo tipo de *esfuerzos* a que se vea sometido en el transcurso de su uso.

El presente trabajo tiene dos objetivos:

I.1.1. Estudiar el *comportamiento mecánico* de los *materiales sólidos* cuando son sometidos a esfuerzos de cualesquiera clases, ya sean de tracción, cortante, compresión, torsión, confinamiento, térmicos, sísmicos, etc.

I.1.2. Establecer un *CRITERIO DE ROTURA TEÓRICO*, que cubije todos los estados de esfuerzos a que pueda verse sometido un material sólido cualquiera.

Para ello se comenzará por definir, en términos matemáticos, la noción de *resistencia* de un *punto material*.

I.2.- RESISTENCIA DE UN PUNTO MATERIAL.

Se puede definir la **resistencia** de un **material sólido** como la capacidad que **un punto** cualquiera de éste posee de resistirse a la **rotura**, inducida por los esfuerzos a que es sometido, debido a sus **propiedades intrínsecas**, que le son exclusivas.

Para establecer tanto la **resistencia** como sus **propiedades intrínsecas**, éstas serán analizadas con el apoyo de las teorías clásicas de **Coulomb** y **Mohr**.

I.3.- TEORIA DE COULOMB.

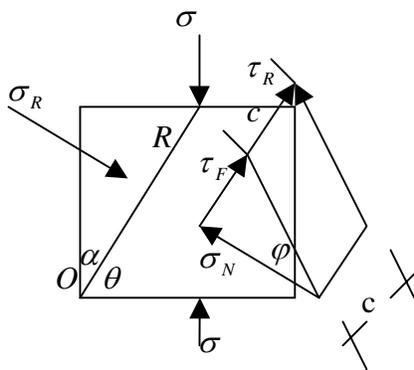


FIGURA...1

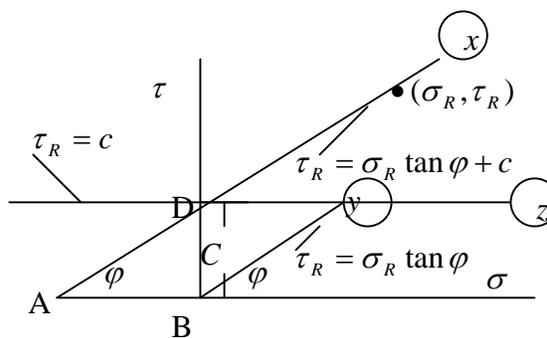


FIGURA...2

I.3.1.- MATERIALES SÓLIDOS CON COHESION

“Se entiende por **cohesión** la resistencia que ofrecen las partículas más pequeñas de los materiales sólidos a los intentos, por parte de los esfuerzos externos a que son sometidos, de variar las distancias que están forzadas a mantener en ausencia de tales esfuerzos”.

Según Coulomb (1736-1806), en un material sólido cohesivo que está en equilibrio bajo la acción de esfuerzos externos σ , como se muestra en la FIGURA 1, se cumple:

$$\sigma_N = \sigma_R \quad (3.1); \quad \tau_F = \sigma_N \tan \varphi = \sigma_R \tan \varphi \quad (3.2); \quad \tau_R = \tau_F + c \quad (3.3)$$

Remplazando (3.2) en (3.3), se obtiene: $\tau_R = \sigma_R \tan \varphi + c$ (3.4)

En donde: τ_R es el esfuerzo cortante que se genera en el **plano de falla** (OR); σ_R es el esfuerzo normal al **plano de falla**; φ es el **ángulo de fricción interna** del material y c es su **cohesión**.

Estas dos últimas son las **propiedades intrínsecas** a que se hizo referencia en 2.1, de tal suerte que

ellas bastarán para identificarlo.

La ecuación (3.3) define el equilibrio del material cohesivo bajo los esfuerzos externos a que es sometido

También se ve en la FIGURA 1 que el plano de falla OR forma un ángulo θ con el plano sobre el cual actúa el esfuerzo externo σ , que llamaremos **ángulo de falla** y otro α con el plano normal a aquél, que es el complemento de θ .

I.3.2.- MATERIALES SÓLIDOS SIN COHESION O GRANULARES.

Se puede calificar como tales a aquellos materiales que han sido sometidos a fragmentación por cualquier medio mecánico, térmico, sísmico o de cualquiera otra naturaleza y que por efecto del quebrantamiento hayan perdido su **cohesión**.

En este caso la ecuación (3.4) se transforma en:

$$\tau_R = \sigma_R \tan \varphi , \text{ de donde: } \frac{\tau_R}{\sigma_R} = \tan \varphi \quad (3.5)$$

Ecuación que define el equilibrio de una masa de material granular o quebrantado y sólo se mantiene en ese estado gracias a la acción de su **coeficiente de fricción interna**, que se conserva **invariable** para el estado cohesivo o el granular .

I.3.3- MATERIALES SIN COEFICIENTE DE FRICCIÓN INTERNA:

En esta categoría entran los líquidos y los gases y la ecuación (3.4) se transforma en:

$$\tau_R = c \quad (3.6)$$

A las representaciones gráficas de las ecuaciones (3.4), (3.5) y (3.6), que se ilustran en la FIGURA 2, como (x), (y) y (z), se les puede denominar **curvas de resistencia**, ya que expresan la **Resistencia** que el material opone a cualquier estado de esfuerzos a que sea sometido. También se les puede llamar **curvas de rotura**, ya que indican el límite a partir del cual el material falla o **curvas características**, puesto que identifican y distinguen a cada material de los demás.

I.4.- DISCUSIÓN DE LA CURVA DE ROTURA O RESISTENCIA

Un análisis cuidadoso de la gráfica correspondiente al material con cohesión (curva x) conduce a varias conclusiones:

I.4.1.- En el punto A

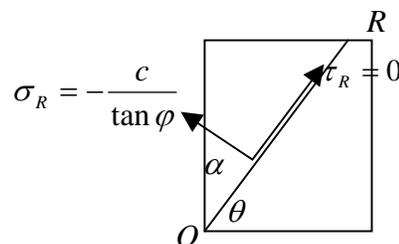


FIGURA 3a

En el punto A , representado en la figura 3a , el esfuerzo cortante que se genera en el plano de rotura es nulo, y el esfuerzo normal a dicho plano es de *tracción directa* e igual a su cohesión dividida por la tangente de su ángulo de fricción interna.

I.4.2.- **Entre los puntos A y B**

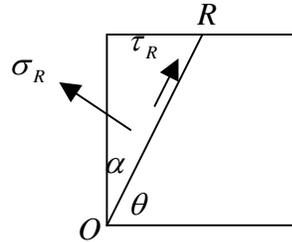


FIGURA...3b

Entre los puntos A y B, tal como se representa en la figura 3b, los esfuerzos que actúan sobre cada uno de los puntos intermedios, paralelos y normales al plano de rotura son combinaciones de cortante y tracción.

I.4.3.- **En el punto B**

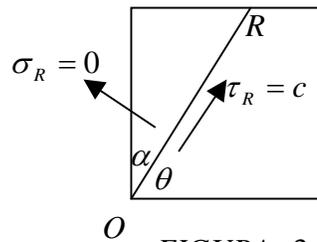


FIGURA...3c

En el punto B, representado en la figura 3c, el esfuerzo normal al plano de rotura es nulo y el cortante sobre dicho plano es igual a la cohesión del material.

Desde el punto de vista de ingeniería, se puede ahora definir la *cohesión* como la *resistencia* del material cuando el esfuerzo normal al plano de falla es nulo y el esfuerzo exterior se ejerce paralelo al plano de falla, es decir que el material trabaja a *cortante puro, directo o simple*.

I.4.4.- **A partir del punto B**

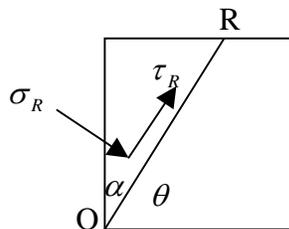


FIGURA...3d

Tal como se observa en la figura 3d, las cargas que actúan sobre cada uno de los puntos intermedios, paralelas y normales al plano de rotura son combinaciones de cortante y compresión variables..

I.4.5.- De la ecuación (3.4) se puede deducir:

$$\tau_R - \sigma_R \tan \varphi = c \quad (4.1)$$

De la ecuación (4.1) se concluye que para cualquier combinación de esfuerzos, expresada en su término izquierdo, el resultado es constante e igual a la **cohesión** del material, igualdad que se denominará **Criterio I** o **de las combinaciones de los esfuerzos cortante y normal** que actúan sobre el plano de rotura e **iguales a una constante** que es la **cohesión** y que, como se verá más adelante, corresponde a la resistencia al corte directo (c) del material.

Lo antes expuesto indica que en la FIGURA 2, para valores por encima de la curva de resistencia el material falla y por debajo de ella es estable.

La curva (x) también describe el comportamiento de un elemento estructural cualquiera, que está conformado por una serie de puntos continuos, sometidos a esfuerzos cortantes y normales de tracción y compresión según la posición que ocupen en su interior, razón por la cual puede considerarse como la **curva de equilibrio** de tal elemento.

I.5. TEORIA DE MOHR.

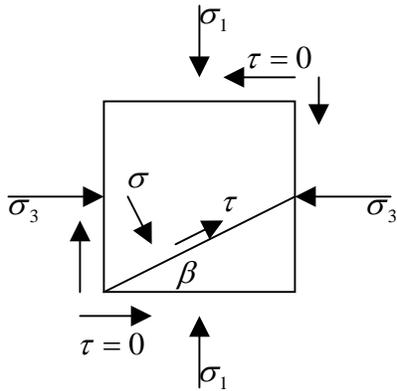


FIGURA...4a

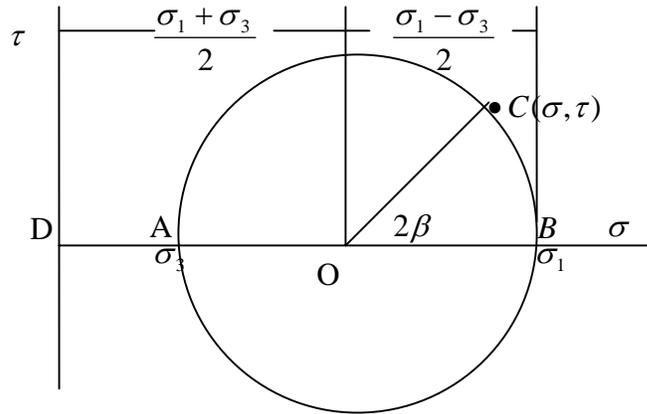


FIGURA...4b

Según **MOHR** (1835-1918), cuando un punto de un material es sometido a un estado planar de esfuerzos, existen en su interior dos planos ortogonales sobre los cuales los *esfuerzos cortantes* que actúan sobre ellos son nulos y los *esfuerzos normales* son: un *máximo*, σ_1 , y un *mínimo*, σ_3 , como se muestra en la FIGURA 4a.

En función de tales esfuerzos máximo y mínimo, los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre un plano cualquiera del punto, poseen los siguientes valores:

$$\sigma = \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right] + \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right] \cos 2\beta \quad (5.1) \quad \text{y} \quad \tau = \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right] \sin 2\beta \quad (5.2)$$

En las que β es el ángulo que hace un plano cualquiera con el plano sobre el cual actúa el *esfuerzo normal máximo*.

Los esfuerzos que se originan en todos los planos que pasan por el punto se pueden representar en un círculo, conocido como CIRCULO DE MOHR, en su honor, tal como aparece en la FIGURA 4b, en la que:

- OB es el plano principal mayor, sobre el cual actúa σ_1 .
- OA es el plano principal menor, sobre el cual actúa σ_3 .

- OC es un plano cualquiera sobre el cual actúa un esfuerzo normal, σ , y un esfuerzo cortante, τ .

I.6 COMPAGINACIÓN DE LAS TEORÍAS DE COULOMB Y MOHR

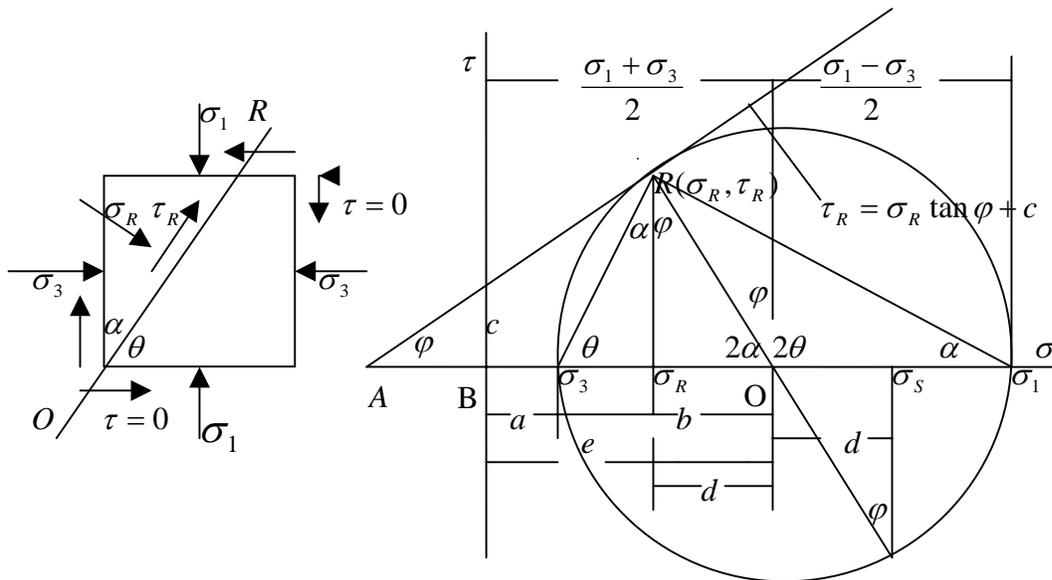


FIGURA...5a

FIGURA...5b

I.6.1.- MATERIALES CON COHESION.

La FIGURA 5 a representa un punto de un elemento estructural cualquiera en el momento en que llega al límite de su resistencia bajo la acción de los esfuerzos principales mayor y menor σ_1 y σ_3 . En ella se aprecia, además, que sobre el plano de falla **OR**, que hace un ángulo de rotura θ con el plano principal mayor y α con el plano principal menor, actúan un esfuerzo normal σ_R y otro cortante τ_R .

La FIGURA 5 b es la representación de lo que sucede al interior del punto analizado, en que la recta $\tau_R = \sigma_R \tan \varphi + c$ corresponde a la teoría de Coulomb y el círculo a la de Mohr.

Si las teorías de Coulomb y Mohr son correctas, el punto de equilibrio **R** (σ_R, τ_R) pertenecerá tanto a la **curva de Resistencia** como al **Círculo de Mohr** y será el punto de tangencia de ambos y a él se llega cuando σ y τ alcanzan los valores de σ_R y τ_R , que son los esfuerzos de equilibrio, por encima de los cuales el material rompe y β alcanza el valor de θ , que es el ángulo de rotura.

Al examinar las propiedades del punto **R**, se deduce:

I.6.1.1- En función de los *esfuerzos principales mayor y menor*:

De la FIGURA 5 b se extrae:

$$\tau_R = \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right] \cos \varphi \quad (6.1) \quad \text{y} \quad \sigma_R = a + b - d = e - d \quad (6.2)$$

En las que: $a = \sigma_3$; $b = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$; $d = \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right] \text{sen} \varphi$ y $e = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$

Remplazando en (6.2):

$$\sigma_R = \sigma_3 + \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right] - \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right] \text{sen} \varphi = \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right] - \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right] \text{sen} \varphi \quad (6.3)$$

Remplazando en: $\tau_R = \sigma_R \tan \varphi + c \quad (3.4)$

$$\left[\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right] \cos \varphi = \left[\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \text{sen} \varphi \right] \left(\frac{\text{sen} \varphi}{\cos \varphi} \right) + c$$

Hechas las transformaciones trigonométricas correspondientes se obtiene:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \left[\frac{1 + \text{sen} \varphi}{1 - \text{sen} \varphi} \right] = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \text{sen} \varphi} \quad (6.4)$$

De la misma figura se deduce:

$$2\theta = 90^\circ + \varphi \quad (6.5), \text{ de donde: } \theta = 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \quad (6.6)$$

En donde θ es el ángulo que el plano de rotura hace con el plano sobre el cual actúa el **esfuerzo principal mayor** y permanece constante.

Su complemento $\alpha = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$ representa el ángulo que hace el plano de rotura con el **esfuerzo principal menor**.

Se puede demostrar que: $\frac{1 + \text{sen} \varphi}{1 - \text{sen} \varphi} = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \tan^2 \theta \quad (6.7)$

I.6.1.1.1.- Directamente, a partir de la FIGURA 5 b: $\tan \theta = \frac{\tau_R}{\sigma_R - \sigma_3} \quad (6.8)$

Usando (5.3) y transformando: $\sigma_R - \sigma_3 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) (1 - \text{sen} \varphi) \quad (6.9)$

Remplazando (5.1) y (5.9) en (5.8) y haciendo las transformaciones, se obtiene:

$$\tan^2 \theta = \frac{\cos^2 \varphi}{(1 - \operatorname{sen} \varphi)^2} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi}{(1 - \operatorname{sen} \varphi)^2} = \frac{(1 + \operatorname{sen} \varphi)(1 - \operatorname{sen} \varphi)}{(1 - \operatorname{sen} \varphi)^2} = \frac{1 + \operatorname{sen} \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi} = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$$

I.6.1.1.2.- Indirectamente, usando la función del ángulo medio:

$$\tan^2(\beta + \gamma) = \left[\frac{\operatorname{sen}(\beta + \gamma)}{\cos(\beta + \gamma)} \right]^2 = \left[\frac{\operatorname{sen} \beta \cos \gamma + \cos \beta \operatorname{sen} \gamma}{\cos \beta \cos \gamma - \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma} \right]^2$$

Si se hace: $\beta = 45^\circ$, $\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\gamma = \frac{\varphi}{2}$

$$\tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \left[\frac{\cos \frac{\varphi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}} \right]^2 = \frac{1 + 2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 + \operatorname{sen} \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi}$$

Por tanto, reemplazando en (5.4):

$$\sigma_1 - \sigma_3 \tan^2 \theta = \sigma_1 - \sigma_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \sigma_1 - \sigma_3 \left[\frac{1 + \operatorname{sen} \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi} \right] = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi} \quad (6.10)$$

Las anteriores igualdades se denominarán **Criterio III** o **de las Combinaciones de los Esfuerzos Principales mayor y menor, iguales a una constante, que** como se verá más adelante, **es la resistencia del material a la compresión simple, σ_c .**

I.6.1.2.- En función de los **esfuerzos normales** (σ_s, σ_R), que actúan sobre el **plano de rotura** (**OR**) y el normal a éste (**RS**):

También de la figura 5 b, se deduce :

$$\sigma_s - \sigma_R = 2d \quad (6.11)$$

$$d = \tau_R \tan \varphi \quad (6.12)$$

Remplazando (6.12) y (3.4) en (6.11), se obtiene:

$$\sigma_s - \sigma_R = 2\tau_R \tan \varphi = 2(\sigma_R \tan \varphi + c) \tan \varphi$$

Y transformando, se llega a:

$$\sigma_s - \sigma_R (1 + 2 \tan^2 \varphi) = 2c \tan \varphi \quad (6.13), \text{ de donde: } \sigma_s \left[\frac{1}{1 + 2 \tan^2 \varphi} \right] - \sigma_R = \frac{2c \tan \varphi}{1 + 2 \tan^2 \varphi} \quad (6.14)$$

Siendo el factor $\frac{1}{1 + 2 \tan^2 \varphi}$ la clave de una propiedad muy importante de los materiales sólidos, como se verá más adelante.

La ecuación (6.13) se denominará **Criterio II** o **de las combinaciones de los esfuerzos normales al plano de rotura y al plano perpendicular a éste, iguales a una constante**, que es **dos veces el producto de la resistencia al corte directo (c) y la tangente del ángulo de fricción interna φ** .

I.6.2.- MATERIALES SIN COHESIÓN (granulares)

De la ecuaciones (3.4), (6.4), (6.10), y (5.13) , cuando $c = 0$, se obtienen:

$$\frac{\tau_R}{\sigma_R} = \tan \varphi \quad (3.5); \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + \operatorname{sen} \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi} = \tan^2 \theta = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (6.15); \quad \frac{\sigma_S}{\sigma_R} = 1 + 2 \tan^2 \varphi \quad (6.16)$$

Estas ecuaciones definen el equilibrio en una masa de material granular o quebrantado en el sistema de Coulomb-Mohr y que sólo se mantiene en ese estado gracias a la acción de su **coeficiente de fricción interna**, que permanece igual para los materiales cohesivos y para los granulares.

I.6.3.- ENUNCIADO DE LA LEY DE ROTURA DE LOS MATERIALES SÓLIDOS.

Todas las combinaciones de los esfuerzos que actúan sobre un punto material, cuando alcanzan el punto de equilibrio, son constantes.

El equilibrio se alcanza en el punto $R(\sigma_R, \tau_R)$ del sistema MOHR-COULOMB y su formulación se obtiene siguiendo los criterios siguientes:

Criterio I.- Si los esfuerzos son el **cortante** y el **normal** que actúan sobre el plano de rotura, la **constante** es la **cohesión** o la **resistencia al corte directo (c)** del material.

$$\tau_R - \sigma_R \tan \varphi = c$$

Criterio II.- Si los esfuerzos son los **normales** que actúan sobre los planos de rotura y el perpendicular a éste, la **constante**, que es **dos veces el producto de la resistencia al corte directo (c) y la tangente del ángulo de fricción interna (φ)**.

$$\sigma_S - \sigma_R (1 + 2 \tan^2 \varphi) = 2c \tan \varphi$$

Criterio III.- Si los esfuerzos son **principales mayor y menor**, la **constante** es **la resistencia a la compresión simple (σ_C)** del material.

$$\sigma_1 - \sigma_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \sigma_C$$

Cuando los materiales carecen de **cohesión**, $c = 0$, por tanto:

IV.- Si se conocen τ_R y σ_R :

$$\frac{\tau_R}{\sigma_R} = \tan \varphi$$

V.- Si se conocen σ_1 y σ_3 : $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + \operatorname{sen} \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi}$, $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \tan^2 \theta$, $\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = \tan^2(45^\circ + \frac{\varphi}{2})$

VI.- Si se conocen σ_s y σ_R : $\frac{\sigma_s}{\sigma_R} = (1 + 2 \tan^2 \varphi)$:

Se concluye que en las ecuaciones I, II, III, IV, V y VI, cuando en un punto de un *elemento* (viga, columna, etc.) de una estructura real, los *términos izquierdos*, respecto a los *derechos*, son:

- **Menores**, el punto se halla estable.
- **Iguals**, el punto se halla en equilibrio.
- **Mayores**, el punto material *rompe*.

I.6.4.- ALGUNAS CONCLUSIONES SOBRE LA **LEY DE ROTURA**

Una atenta revisión de la FIGURA 5 b conduce a las observaciones siguientes:

I.6.4.1.- En el punto A, donde $\tau = 0$, $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_R$, por consiguiente:

- El círculo de Mohr queda reducido a un punto.
- Los esfuerzos a que está sometido el material son negativos o de tracción e iguales en todas las direcciones y su valor es:

$$-\sigma_1 = -\sigma_3 = -\sigma_R = -\frac{c}{\tan \varphi}$$

- El límite inferior de rotura estará dado por la relación: $\frac{-\sigma_1}{-\sigma_3} = 1$
- El material rompe por tracción directa.

I.6.4.2.- En el punto B, donde $\tau_R = c$, $\sigma_R = 0$, por tanto:

- El material rompe por *cortante puro* o *directo*.
- A partir de este punto, el esfuerzo normal al plano de rotura pasa de tracción a compresión.

Lo cual indica que el material entre los puntos A y B (incluidos ambos) rompe por combinaciones de esfuerzos de tracción y cortantes que actúan sobre el plano de rotura.

I.6.4.3.- A partir del punto B, ($\sigma_R > 0$), el material falla por combinaciones de esfuerzos de compresión y cortantes que actúan sobre el plano de rotura.

I.6.4.4.- El número de **RESISTENCIAS** del material es infinito.

I.6.4.5.- La **RESISTENCIA** de cada material, cuando está intacto, sólo depende de su **COHESION** c , que como ya vimos es su resistencia al **cortante puro**, es decir, cuando el esfuerzo normal al plano de falla es nula ($\sigma_R = 0$) y de su **COEFICIENTE DE FRICCION INTERNA** φ , y cuando está quebrantado depende solamente de este último.

I.6.4.6.- Un **MATERIAL SOLIDO** será, por tanto, aquel que posea **COHESION Y COEFICIENTE DE FRICCION INTERNA**.

I.6.4.7.- Los esfuerzos conocidos como resistencias a: compresión simple o uniaxial, tracción, torsión, cortante puro, triaxial etc., son sólo casos particulares que se enmarcan dentro del **LEY DE ROTURA**, que dan una idea general de la **RESISTENCIA** del material en cuestión pero cada una por sí sola no la definen.

I.6.4.8.- Por consiguiente, para determinar la **RESISTENCIA** de un material es condición suficiente y necesaria, determinar mediante ensayos de laboratorio la **COHESION** y **EL COEFICIENTE DE FRICCION INTERNA**.

I.6.4.9.- Conocidos estos dos parámetros, se puede establecer la **CURVA CARACTERISTICA** del material que va a ser sometido a los **ESFUERZOS DE TRABAJO**.

I.6.4.10.- Averiguadas los **ESFUERZOS DE TRABAJO** se aplicará el **CRITERIO DE ROTURA** correspondiente para saber si el material se encuentra **estable**, en **equilibrio** o **falla** y en este último caso calcular la magnitud y la **superficie** de la **falla**, definir los correctivos necesarios y poderlos calcular y aplicar, preferentemente de **manera preventiva**.

I.7.- LEY DE HOOKE.

En la resistencia de materiales clásica, cuando se somete un *material* a esfuerzo unidireccional, sea a compresión simple o a tracción directa, éste experimenta en el primer caso una contracción en el sentido de la aplicación de la carga, ε_y , y una expansión en el sentido transversal a ella, ε_x , y a la inversa en el segundo caso.

La deformación unitaria que experimenta en el sentido de la aplicación de la carga es proporcional al esfuerzo aplicado y el factor de proporcionalidad, que se denomina *Módulo de Elasticidad*, permanece constante dentro de un cierto límite llamado *límite elástico*.

A la formulación empírica de este fenómeno se le denominó *LEY DE HOOKE* en honor de su descubridor y es definida por la relación:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}; \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (7.1)$$

En que:

ε = Deformación unitaria del material

σ = Esfuerzo a que se somete el material

E = Módulo de elasticidad del material

I.8.- COEFICIENTE DE POISSON

I.8.1.- EN FUNCIÓN DE LAS DEFORMACIONES.

La relación entre las deformaciones lateral y longitudinal, notada por **POISSON**, recibió en su honor el nombre de **Coefficiente de POISSON** y se expresa por:

$$\nu = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} \quad \varepsilon_x = \nu \varepsilon_y \quad (8.1)$$

Si sometemos el **material** a esfuerzos en las tres direcciones ortogonales (x, y, z), las deformaciones en cada una de ellas serán:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (8.2 \text{ a})$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (8.2 \text{ b})$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (8.2 \text{ c})$$

Cuando el material se halla en **confinamiento**, como es el caso de las rocas de los terrenos vírgenes, al estar en estado de **constreñimiento** que le imposibilita expandirse (o contraerse) lateralmente, se cumple que:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$$

Debido al constreñimiento lateral: $\sigma_y = \sigma_x$, de (8.2 a) o (8.2 b):

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z = K \sigma_z, \text{ de donde: } \frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \frac{\sigma_y}{\sigma_z} = \frac{\nu}{1-\nu} = K \quad (8.3)$$

En caso de constreñimiento absoluto (tridimensional), $\varepsilon_z = 0$ y de (7.2 c): $\frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \frac{\sigma_y}{\sigma_z} = \frac{1}{2\nu}$ (8.4)

Igualando (8.2) y (8.3), se obtiene: $\frac{\nu}{1-\nu} = \frac{1}{2\nu}$

De donde se deduce: $2\nu^2 + \nu - 1 = 0$, y resolviendo: $\nu = 0,5$

Lo que conduce a la conclusión de que todos los materiales en confinamiento absoluto se comportan como un líquido.

I.8.2.- EN FUNCIÓN DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN INTERNA, φ .

- De manera directa, analizando el material fragmentado, ya que éste conserva el mismo coeficiente de fricción interna que el intacto.
- De manera indirecta, analizando el comportamiento del mismo material en confinamiento, sometido a su propio peso.

La FIGURA 6 corresponde a un cuerpo en reposo, lo suficientemente extenso en el sentido horizontal, que no está sometido a cargas externas y por consiguiente los puntos de su interior sólo soportan los esfuerzos originados por el peso de la masa que lo suprayace.

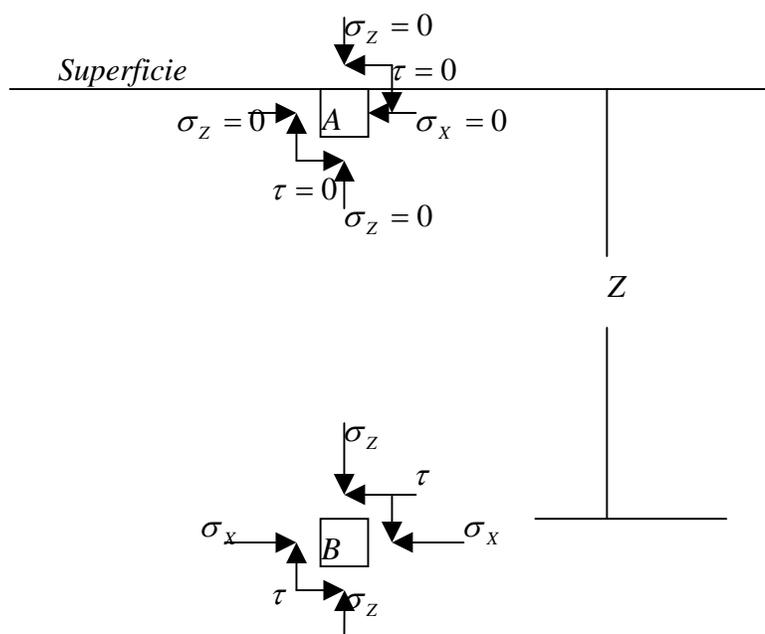


FIGURA...6

Si se examina el punto A situado en la superficie, se ve que los esfuerzos que soporta son nulos, es decir:

$$\tau = 0; \quad \sigma_z = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_x = \sigma_y = 0$$

El punto B situado en el interior soporta esfuerzos iguales a:

$$\tau; \quad \sigma_z \quad \text{y} \quad \sigma_x = \sigma_y$$

Puesto que los puntos analizados están en equilibrio, la FIGURA 7 representa las condiciones antes enunciadas.

- Todo esfuerzo unidireccional externo aplicado a un material cualquiera genera al interior del material un esfuerzo en las dos direcciones normales a la dirección de aplicación del esfuerzo externo, cuyo valor está dado por la siguiente relación:

$$\sigma_x = \sigma_y = K\sigma_z = \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)\sigma_z = \left(\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z - \varepsilon_x}\right)\sigma_z = \left(\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z - \varepsilon_y}\right)\sigma_z = \left(\frac{\cos^2 \varphi}{2 - \cos^2 \varphi}\right)\sigma_z \quad (7.12)$$

I.9.- PRINCIPIO DE PASCAL.

Este principio, enunciado en 1653 por el físico francés Blas Pascal (1623-1662) que expresa que “la presión aplicada a un fluido encerrado se transmite sin disminución a cada punto del fluido y de las paredes del recipiente”, se demuestra aplicando (7.12), así:

$$\sigma_y = \sigma_x = K\sigma_z = \left[\frac{1}{1 + 2 \tan^2 \varphi}\right]\sigma_z = \left[\frac{\cos^2 \varphi}{2 - \cos^2 \varphi}\right]\sigma_z$$

Puesto que, para un líquido, $\varphi=0$: $\sigma_y = \sigma_x = \sigma_z$

El coeficiente de Poisson del líquido es: $\nu = \frac{\cos^2 \varphi}{2} = 0,5$

I.10.- OTRAS PROPIEDADES DE LOS SÓLIDOS QUE DEPENDEN DE φ y c

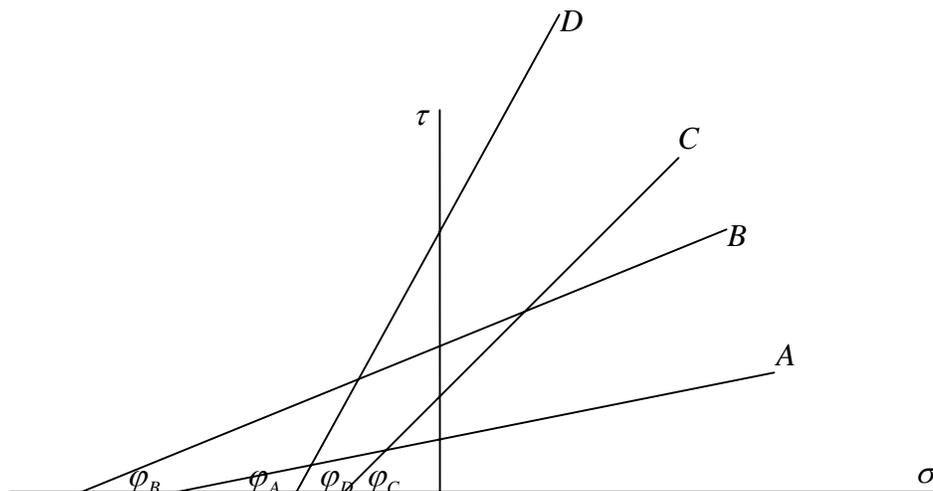


FIGURA...8

La FIGURA 8 muestra las curvas de rotura de varios materiales, A, B, C y D, identificados por su **ángulo de fricción interna** y su **cohesión**, .

I.10.1.- FRAGILIDAD, DUCTILIDAD, MALEABILIDAD, PLASTICIDAD, LICUEFACCION, ESTALLIDO Y DUREZA.

Una detenida revisión de la FIGURA 8 permite observar que: $\varphi_A < \varphi_B < \varphi_C < \varphi_D$, lo que conduce

a: $\nu_A > \nu_B > \nu_C > \nu_D$, de acuerdo con la ecuación (7.10) y por tanto: $\left(\frac{\varepsilon_X}{\varepsilon_Z}\right)_A > \left(\frac{\varepsilon_X}{\varepsilon_Z}\right)_B > \left(\frac{\varepsilon_X}{\varepsilon_Z}\right)_C >$

$\left(\frac{\varepsilon_X}{\varepsilon_Z}\right)_D$, al aplicar la ecuación (7.3), lo que indica que, en lo que respecta a deformación, el material

A es muy deformable, en tanto que D lo es muy poco, y se puede afirmar que mientras A es un material **plástico**, D sería **frágil**. Entre los dos extremos anteriores estarán los **dúctiles** o **maleables**, siendo $\varphi = 45^\circ$ el límite a partir del cual empieza la categoría de **frágil**.

Por todo lo visto anteriormente, dependiendo del **COEFICIENTE DE FRICCIÓN INTERNA**, a medida que φ es mayor que 45° , ν decrece, tendiendo a cero, lo que indica que el material, cuando se halle sometido a condiciones de COMPRESIÓN, a medida que su **COEFICIENTE DE FRICCIÓN INTERNA** sea mayor, romperá más bruscamente, es decir aumentará su condición de **FRAGILIDAD**, produciendo **ESTALLIDO**, tal como sucede con el vidrio y las rocas cristalinas.

A medida que φ es menor de 45° el material tenderá a deformarse más fácilmente, resistiéndose a romper, conservando cada vez más la continuidad de la materia, cediendo de tal manera que cada vez se hace más difícil la disgregación de sus partículas, pasando por las categorías de **DUCTIL**, **MALEABLE** y **PLÁSTICO**, hasta llegar al estado de **LICUEFACCION**, estado en que tendrá el comportamiento de un líquido, ya que la matriz que contiene los trozos sólidos posee un ángulo de fricción interna nulo.

La **DUREZA**, tal como se mide cualitativamente en la escala de **Mohs**, depende de la **RESISTENCIA AL CORTE SIMPLE** del material analizado y dicha escala, que en la actualidad sólo produce un efecto comparativo, es posible convertirla en cuantitativa a través de su relación directa con el **cortante puro**.

CAPÍTULO II

APLICACIÓN DE LA LEY DE ROTURA A LOS ENSAYOS DE LABORATORIO

II.1- ENSAYO DE COMPRESIÓN SIMPLE.

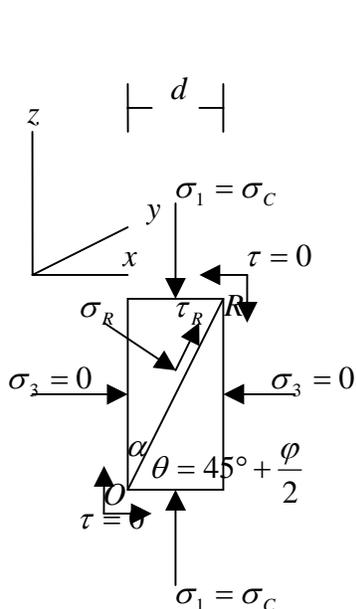


Figura...9a

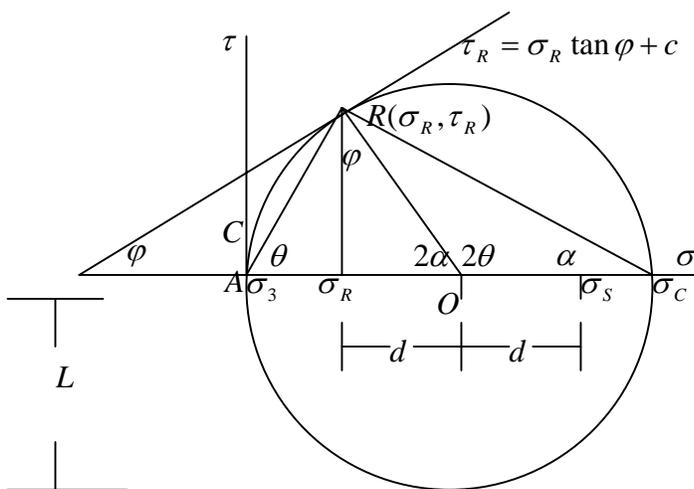


Figura...9b

II.1.1.- BREVE DESCRIPCIÓN DEL ENSAYO

Como se muestra en la figura (9a), el espécimen o probeta, cuyas dimensiones son L y d , se somete a un esfuerzo de compresión normal a su área transversal, sobre una superficie que carece de esfuerzo cortante y que durante la aplicación de la carga permanece sin fricción.

Si simultáneamente se desea averiguar el *coeficiente de Poisson*, se medirán las deformaciones transversal y longitudinal.

Del ensayo se obtendrán los siguientes valores:

F_c = Carga de compresión aplicada al espécimen hasta la rotura.

A_c = Área de la sección transversal del espécimen.

$\sigma_3 = 0$ = Esfuerzo principal menor.

$\varepsilon_x = \varepsilon_y$ = Deformación lateral.

ε_z = Deformación longitudinal.

II.1.2.- CÁLCULO DE LA RESISTENCIA

$$\sigma_c = \frac{F}{A}$$

Si la sección transversal de la probeta fuera circular: $A = \frac{\pi d^2}{4}$; y reemplazando:

$$\sigma_c = \frac{4F}{\pi d^2} \quad (1.1)$$

II.1.3.- CÁLCULO DEL MÓDULO DE POISSON

Aplicando (8.1): $\nu = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}$

II.1.4.- CÁLCULO DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN INTERNA

Aplicando (8.10): $\nu = \frac{\cos^2 \varphi}{2}$; $\varphi = \cos^{-1} \sqrt{2\nu}$ (1.2)

II.1.5.- CÁLCULO DE LA RESISTENCIA EN FUNCIÓN c y φ

Aplicando (6.10): $\sigma_1 - \sigma_3 \tan^2 \theta = \sigma_1 - \sigma_3 \tan^2 (45^\circ + \frac{\varphi}{2}) = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$

Sabiendo además que $\sigma_3 = 0$ y $\sigma_1 = \sigma_c$, se obtiene:

$$\sigma_c = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} = (1.3)$$

También: $\sigma_c^2 = \frac{4c^2 \cos^2 \varphi}{(1 - \sin \varphi)^2} = \frac{4c^2 (1 - \sin^2 \varphi)}{(1 - \sin \varphi)^2} = \frac{4c^2 (1 + \sin \varphi)}{(1 - \sin \varphi)} = 4c^2 \tan^2 (45^\circ + \frac{\varphi}{2})$

De donde: $\varphi = 2[\tan^{-1} \frac{\sigma_c}{2c} - 45^\circ]$ (1.4)

II.1.6.- CÁLCULO DE LA COHESIÓN

De (1.3) se obtiene: $c = \frac{\sigma_c (1 - \sin \varphi)}{2 \cos \varphi}$ (1.4)

II.1.7.- CONFECCIÓN DE LAGRÁFICA MOHR-COULOMB

Con los datos obtenidos en el ensayo, la gráfica MOHR-COULOMB quedará como aparece representada en la Figura 9b, puesto que el diámetro del círculo es la mitad de σ_c y además es tangente a recta de rotura.

II.1.7.- CÁLCULO DE $\tau_R, \sigma_R, \sigma_S$

De la misma figura 9b:

$$\tau_R = \frac{\sigma_C \cos \varphi}{2} \quad (1.5); \quad \sigma_R = \frac{\sigma_C (1 - \operatorname{sen} \varphi)}{2} \quad (1.6); \quad \sigma_S = \frac{\sigma_C (1 + \operatorname{sen} \varphi)}{2} \quad (1.7)$$

II.1.8.- DIMENSIONES DE LA PROBETA

Para que el ensayo resulte fidedigno, las dimensiones del espécimen, deben ser las deducidas de la manera siguiente:

- De las figuras 9 a y 9 b :

$$\frac{L}{d} = \tan \theta = \frac{\tau_R}{\sigma_R} \quad (1.8)$$

- Reemplazando (1.5) y (1.6) en (1.8):

$$\frac{L}{d} = \frac{\cos \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi} = \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (1.9)$$

Tal como se aprecia en (1.9), la relación entre las dimensiones depende exclusivamente del ángulo de fricción interna del material ensayado, por consiguiente será: para 10°, 1,19; para 20°, 1,43, para 30°, 1,73; para 45°, 2,41; para 60°, 3,73.

II.2.- ENSAYO DE TRACCION DIRECTA

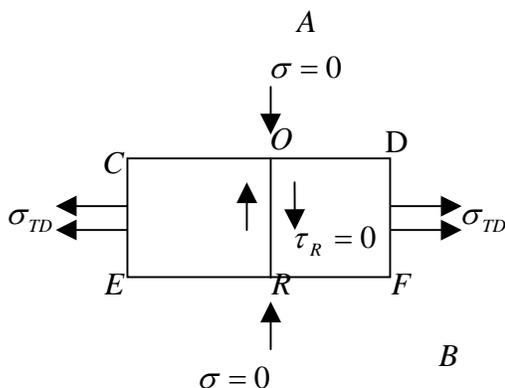


FIGURA...10a

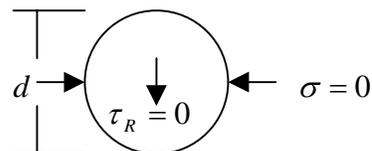


FIGURA..10b

II.1.- BREVE DESCRIPCIÓN DEL ENSAYO

Como se muestra en la figura (10a), el espécimen o probeta se somete a un esfuerzo de tracción directa, σ_{TD} , normal al plano de rotura O R.

Del ensayo se obtendrán los siguientes valores:

F_{TD} = Carga de tracción aplicada al espécimen hasta la rotura.

A = Área de la sección transversal del espécimen.

II.1.2.- CÁLCULO DE LA RESISTENCIA

$$\sigma_{TD} = \sigma_R = -\frac{F_{TD}}{A}$$

Si la sección transversal de la probeta fuera circular: $A = \frac{\pi d^2}{4}$; y reemplazando

$$\sigma_{TD} = \sigma_R = -\frac{4F_{TD}}{\pi d^2}$$

II.1.3.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA MOHR-COULOMB

De acuerdo con la interpretación obtenida en I.4.1, puesto que $\tau_R = 0$ y $\sigma_R = \sigma_{TD}$, su representación gráfica corresponderá al punto A de la recta de equilibrio, en la Fig. 10 c.

El círculo de Mohr queda reducido a un punto, por consiguiente:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_R = \sigma_{TD} = -\frac{4F}{\pi d^2} = -\frac{c}{\tan \varphi} \quad (1.2)$$

Tal como se muestra en la Figura 10 c.

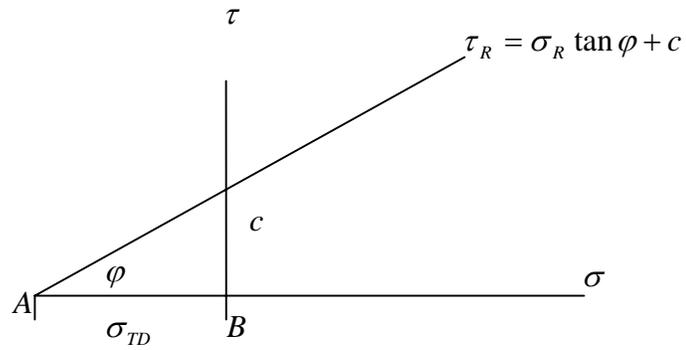


Figura...10c

II.3.- ENSAYO DE CORTE O COHESIÓN

II.3.1.- ENSAYO DE CORTE DIRECTO O PURO.

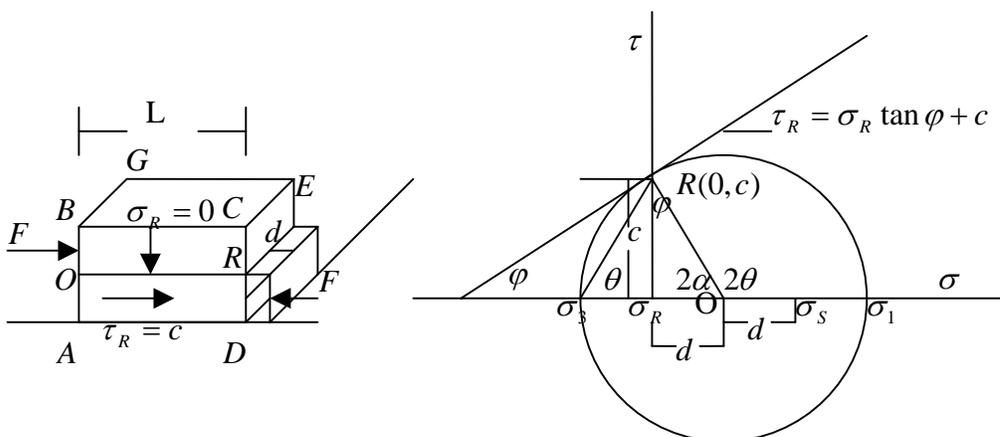


Figura...11a

Figura...11b

II.3.1.1.- BREVE DESCRIPCIÓN DEL ENSAYO

Como se muestra en la figura (11a), el espécimen o probeta, ABCDEG, se somete a la carga F paralela al plano de rotura OR , mientras que el esfuerzo normal al mismo plano (σ_R) es nulo.

Del ensayo se obtendrán los siguientes valores:

F = Carga cortante aplicada al espécimen hasta la rotura.

$A_R = Ld$ = Área del plano de rotura OR del espécimen.

$\sigma_R = 0$ = Esfuerzo normal al plano de rotura OR .

II.3.1.2.- CÁLCULO DE LA RESISTENCIA $c = \frac{F}{A_R} = \frac{F}{Ld}$

II.1.3.3.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA MOHR-COULOMB

La representación Mohr-Coulomb es tal como se ve en la fig.(16b), en la que se observa:

$$\tau_R = c \quad \text{y} \quad \sigma_R = 0$$

II.3.2.- ENSAYO DE CORTE INDIRECTO O BRASILERO.

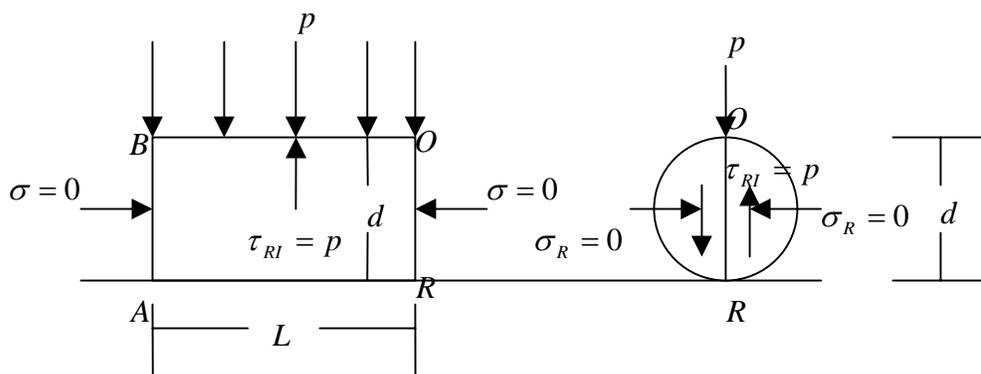


Figura...12

II.3.1.1.- BREVE DESCRIPCIÓN DEL ENSAYO

Como se muestra en la figura (12), el espécimen o probeta, ABOR, de sección circular de diámetro d , se somete a la carga F paralela al plano de rotura ABOR, mientras que el esfuerzo normal al mismo plano (σ_R) es nulo.

Del ensayo se obtendrán los siguientes valores:

F = Carga cortante aplicada al espécimen hasta la rotura.

$A_R = Ld$ = Área del plano de rotura, ABOR, del espécimen.

$\sigma_R = 0$ = Esfuerzo normal al plano de rotura OR.

II.3.1.2.- CÁLCULO DE LA RESISTENCIA $p = \tau_{RI} = \frac{F}{A_R} = \frac{F}{Ld}$

II.1.3.3.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA MOHR-COULOMB

Puesto que $\sigma_R = 0$, $\tau_{RI} = p = c$

La representación Mohr-Coulomb es tal como se ve en la fig.(11b).

Lo cual lleva a concluir que las **resistencias** del espécimen **al Corte Directo y al Indirecto** o **Ensayo Brasileiro** son equivalentes e iguales a la cohesión c .

II.4.- ENSAYO TRIAXIAL

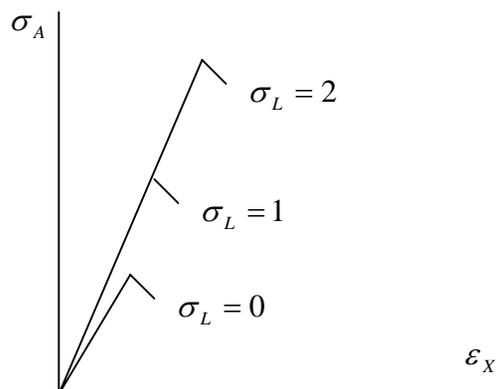


Figura...13

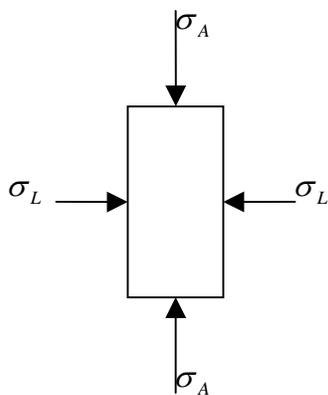


Figura...14a

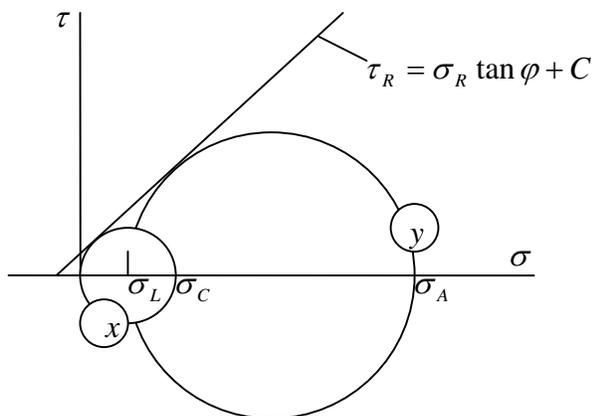


Figura...14b

Las figuras (14a y 14b) representan los ensayos llevados a cabo por vez primera por Von Karmann, llamados posteriormente **triaxiales**, que nos muestran que cuando a un testigo sometido inicialmente a compresión simple se le aplican esfuerzos laterales variables, su resistencia a la rotura aumenta progresivamente.

Este fenómeno se explica así:

En el ensayo a compresión simple, círculo x de la Fig. 14b: $\sigma_1 = \sigma_C$ y $\sigma_3 = 0$

En que σ_c es la resistencia de la probeta a compresión simple.

Si el esfuerzo lateral se cambia por $\sigma_L = \sigma_3$, la compresión axial para llegar a la rotura será σ_A y su representación estará dada por el círculo y en la Fig. 11b.

II.4.1.- BREVE DESCRIPCIÓN DEL ENSAYO

Como se muestra en la figura (15a), el espécimen o probeta, se somete a un esfuerzo de compresión normal a su área transversal y simultáneamente a otro esfuerzo lateral, hasta su rotura.

Del ensayo se obtendrán los siguientes valores:

F = Carga axial de compresión aplicada al espécimen hasta la rotura.

$\sigma_L = \sigma_3$ = Esfuerzo lateral aplicada al espécimen.

A = Área transversal del espécimen.

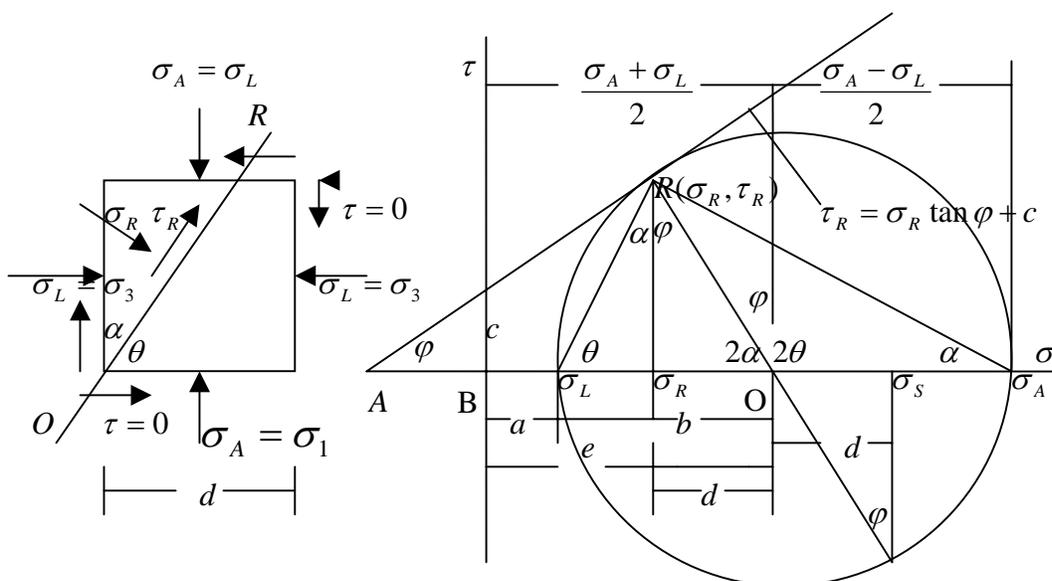


FIGURA...15a

FIGURA...15b

II.4.2.- CÁLCULO DE LA RESISTENCIA

$$\sigma_A = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2}$$

II.4.3- REPRESENTACIÓN GRÁFICA MOHR-COULOMB

La representación Mohr-Coulomb es tal como se ve en la fig.(15b).

CÁLCULO DE LA RESISTENCIA EN FUNCIÓN DE c φ

Si en la expresión de equilibrio $\sigma_1 - \sigma_3 \frac{1 + \operatorname{sen} \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi} = \frac{2C \cos \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi}$ se hacen los correspondientes reemplazos por los valores obtenidos en el ensayo, la expresión de equilibrio será:

$$\sigma_A - \sigma_L \left[\frac{1 + \operatorname{sen} \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi} \right] = \sigma_A - \sigma_L \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \sigma_A - \sigma_L \tan^2 \theta = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi}$$

En el caso de los materiales muy blandos, como las arcillas, toda vez que la anterior ecuación posee las incógnitas c y φ , bastará realizar dos ensayos triaxiales para obtener los parámetros que definen la resistencia del material estudiado.

II.5.- CONFECCIÓN DE LA CURVA DE RESISTENCIA O ROTURA DEL MATERIAL

La curva de resistencia de cualquier material sólido se debe confeccionar a partir de ensayos de laboratorio sobre un espécimen seleccionado según la norma establecida para tales ensayos.

Puesto que la curva de resistencia del material se da en función de φ y c , sólo será necesario efectuar:

II.5.1.- Un ensayo de compresión simple, si el material es frágil, acompañado de la medición de las deformaciones lateral y longitudinal, para obtener la resistencia a la compresión simple, σ_c , y el módulo de Poisson, ν ,

Con los anteriores valores se procede a calcular:

$$\varphi = \cos^{-1} \sqrt{2\nu} \quad \text{y}$$

$$c = \frac{\sigma_c(1 - \operatorname{sen} \varphi)}{2 \cos \varphi}$$

II.5.2.- Dos ensayos cualesquiera de los descritos anteriormente. que pueden ser:

- Uno de Cortante Directo o el Ensayo Brasilerero para conocer c .
- Otro que puede ser de compresión simple, triaxial o de tracción directa.

Si se escoge de corte directo (o el ensayo Brasilerero) se obtiene directamente c y si se acompaña con el de tracción directa, el coeficiente de fricción interna será:

$$\varphi = \tan^{-1} \left[\frac{c}{\sigma_{TD}} \right]$$

De igual manera se pueden combinar dos ensayos cualesquiera, dependiendo del tipo de material que se ha de investigar.

A partir de los anteriores valores se puede calcular las restantes resistencias del material investigado, de acuerdo con el siguiente ejemplo:

Al estudiar un material se le practicaron en el laboratorio los siguientes ensayos:

- De corte directo: $c = 164 \frac{k}{cm^2}$
- De compresión simple: $\sigma_c = 814 \frac{k}{cm^2}$

Con los anteriores valores se procede a calcular las restantes propiedades del material:

- **Coeficiente de de Fricción Interna**, aplicando la ecuación (1.4)

$$\varphi = 2[\tan^{-1} \frac{\sigma_c}{2c} - 45^\circ] = 2[\tan^{-1} \left\{ \frac{814}{2(164)} \right\} - 45^\circ] = 46^\circ$$

- **Coeficiente de Poisson**

$$\nu = \frac{\cos^2 \varphi}{2} = \frac{\cos^2 46^\circ}{2} = 0,24$$

- **Coeficiente de Empuje lateral**

$$K = \frac{\nu}{1-\nu} = 0,32$$

- **Resistencia a la Tracción Directa**

$$\sigma_{TD} = -\frac{c}{\tan \varphi} = \frac{164}{\tan 46^\circ} = 158 \frac{k}{cm^2}$$

- **Ensayo Triaxial.**

Si se le aplica un esfuerzo lateral $\sigma_L = 10 \frac{k}{cm^2}$, el esfuerzo de compresión axial que se le debe aplicar para llevarlo hasta la rotura será:

$$\sigma_A = \frac{\sigma_L(1 + \operatorname{seno} \varphi) + 2c \cos \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi} = \sigma_c + \sigma_L \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = 814 + 10 \tan^2 68^\circ = 875 \frac{k}{cm^2}$$

De este resultado se deduce que si al material se le aplicara un esfuerzo de compresión de $875 \frac{k}{cm^2}$, rompería bajo el efecto de la carga aplicada, sin embargo sólo bastaría **ayudarlo** con un esfuerzo lateral de apenas $10 \frac{k}{cm^2}$.

Si se compara las demás resistencias con la resistencia a compresión simple, se obtienen los valores siguientes:

- Respecto al corte directo: $\frac{c}{\sigma_c} = \frac{164}{840} = 19,5\%$

- Respecto a la tracción directa: $\frac{\sigma_{TD}}{\sigma_c} = \frac{158}{840} = 18,8\%$

II.6.- GRAFICA DE LOS ESTADOS DE ESFUERZOS DE LA ROCA ANALIZADA

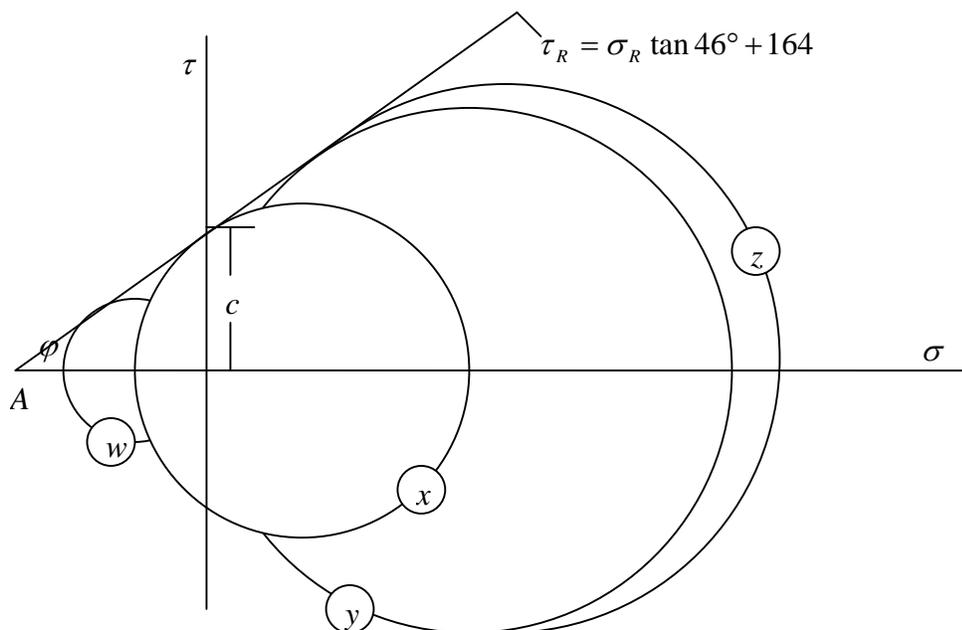


Figura...16

La Figura 16 representa todos los estados de esfuerzos a los que ha sido sometida el material sólido correspondiente al ejemplo anteriormente analizado de tal forma que el punto **A** corresponde a la resistencia a **tracción directa** en que el círculo de Mohr está reducido ese punto, el círculo **w** corresponde a esfuerzos de tracción normales al plano de rotura, el círculo **x**, corresponde a esfuerzo de corte directo; el círculo **y** corresponde a esfuerzo de compresión simple y el círculo **z** corresponde a uno del infinito número de esfuerzos de confinamiento.

Por último, la recta de rotura $\tau_R = \sigma_R \tan \varphi + c$, corresponde a la envolvente de todos los círculos de equilibrio.

CAPÍTULO III

APLICACIONES A ELEMENTOS ESTRUCTURALES REALES

Para ilustrar como se debe utilizar **LEY DE ROTURA** a los elementos estructurales que entran en la construcciones de superficie (civiles), se desarrollarán los cálculos de algunos elementos estructurales de ocurrencia cotidiana..

III.1.- PROCEDIMIENTO A SEGUIR

III.1.1. CONFECCIÓN DE LA CURVA DE ROTURA DEL MATERIAL A UTILIZAR

En el laboratorio se someterá a ensayos el material seleccionado para construir el elemento estructural, tal como fue indicado en el capítulo II, para determinar los φ y c correspondientes y con ellos se dibujará la curva de rotura del material.

III.1.2.- CÁLCULO DE LOS ESFUERZOS

Utilizando las fórmulas matemáticas deducidas en la **Resistencia de Materiales** clásica se obtendrán las **solicitaciones** y a partir de ellas los **esfuerzos** a que está sometido en su interior el elemento estructural estudiado.

III.1.3.- APLICACIÓN DE LA LEY DE ROTURA

Aplicando los **Criterios** I, II o III de la **LEY DE ROTURA** deducida en el capítulo I, según la forma en que actúen los esfuerzos en los puntos críticos analizados del elemento estructural estudiado, reemplazando en el criterio escogido los valores encontrados y comparando el resultado obtenido con la resistencia del material con el cual el elemento estructural ha sido fabricado.

De esta comparación se deducirá:

III.1.3.1.- Si el punto analizado se halla **estable, en equilibrio o romperá**.

III.1.3.2.- En caso de que el punto falle, la **profundidad** hasta donde alcance la falla.

III.1.3.3.- La **superficie de falla** .

III.1.3.4.- Las **medidas** a adoptar para evitar la rotura.

III.2.- VIGA SIMPLEMENTE APOYADA Y UNIFORMEMENTE CARGADA

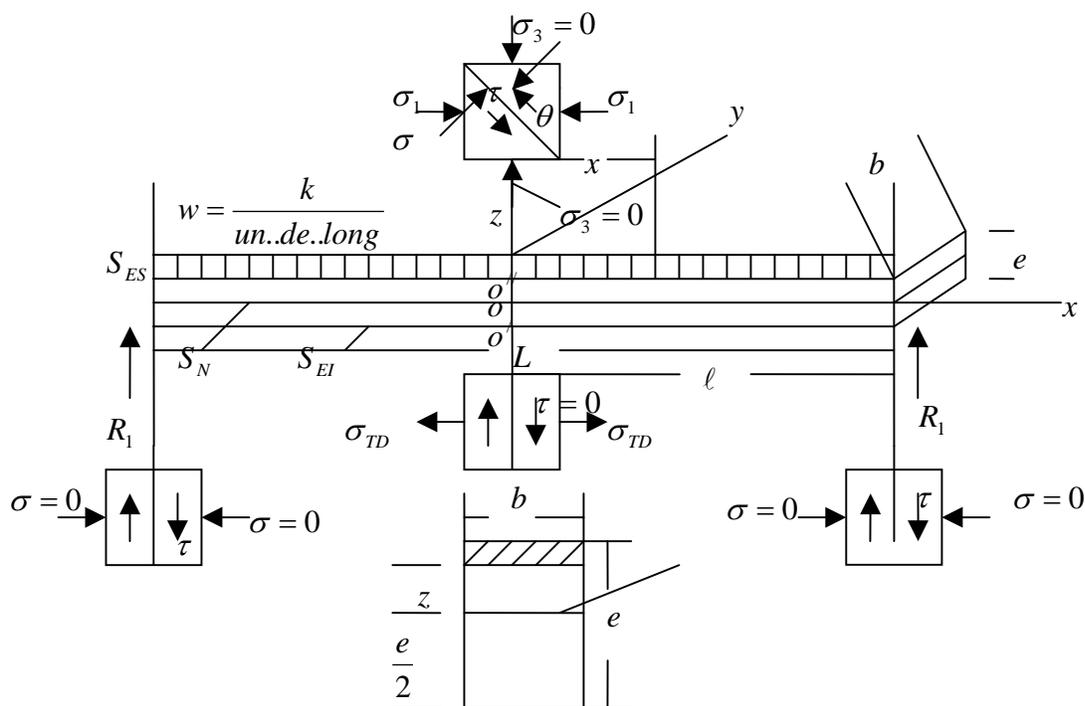


FIG. 21

III.2.1.- CONDICIONES GENERALES:

La FIG. (21) muestra de manera esquemática la viga en cuestión, en que:

- O : Centro de la viga y centro de coordenadas x y z .
- S_{ES} : Superficie exterior superior de la viga.
- S_N : Superficie interior neutra de la viga.
- S_{EI} : Superficie exterior inferior de la viga.
- Distancia a partir del centro de coordenadas: x , en cm.
- Luz de la viga: L , en cm.
- Distancia del centro al apoyo: $\ell = L/2$, en cm.
- Forma de la viga: Rectangular.
- Espesor de la viga: e , en cm.

- Ancho de la viga: b , en cm.
- Carga unitaria: p , en $\frac{k}{cm^2}$
- Carga por unidad de longitud: $w = pb$, en $\frac{k}{cm}$
- Momento de inercia respecto al eje neutro: $I = \frac{be^3}{12}$, en cm^4

III.2.2.- SOLICITACIONES

Sobre un plano cualquiera normal al eje longitudinal de la viga, situado a una distancia x del centro O , al interior de la viga actúan las siguientes solicitaciones:

III.2.1.1.- **Una fuerza cortante** F , en kilogramos (k).

$$F = wx = pbx \quad (14.1)$$

En el centro de la viga: $x = 0$ y $F = 0$, lo que indica que en la cara concordante con el eje z la fuerza cortante es nula.

III.2.1.2.- **Un Momento flector** M , en $k.cm.$, positivo por debajo del eje x y negativo por encima del mismo eje.

$$(14.2) \quad M = \pm \frac{w}{2}(x^2 - \ell^2) = \pm \frac{pb}{2}(x^2 - \ell^2)$$

En los apoyos, $x = \pm \ell$ y $M = 0$; en el centro, $x = 0$ y $M = \pm \frac{w}{2}\ell^2 = \pm \frac{pb}{2}\ell^2$

III.2.3.- ESFUERZOS.

Las solicitaciones antes enumeradas y descritas, generan al interior de la viga y sobre una cara cualquiera normal a su eje longitudinal dos tipos de esfuerzos, así:

III.2.2.1.- **Normales**, originados por el momento flector M , cuyas magnitudes son:

$$\sigma = \pm \frac{Mz}{I} = \pm \frac{12pb(x^2 - \ell^2)z}{2be^3} = \pm \frac{6p(x^2 - \ell^2)z}{e^3} \quad (14.3)$$

Si: $z = \pm \frac{e}{2}$ se comprueba que en las fibras externas superior e inferior, a todo lo largo de su

luz, la viga está sometidas a esfuerzos de compresión y tracción respectivamente, lo que indica que, en una viga de estas características, la porción entre el eje neutro y la fibra externa superior trabaja a compresión, en tanto que la porción entre el eje neutro y la fibra externa inferior lo hace a tracción,

que alcanzarán sus valores máximo y mínimo cuando $x = 0$, $\sigma = +\frac{3p\ell}{2e} = -\frac{3p\ell}{2e}$, respectivamente.

Si $z = 0$, $\sigma = 0$, lo que indica que a todo lo largo del eje central el esfuerzo normal es nulo.

Si $x = \ell$, $\sigma = 0$, lo que indica que en los extremos de la viga el esfuerzo normal es nulo.

III.2.2.2.- **Cortantes**, originados por la fuerza cortante F y cuyas magnitudes están dadas por:

$$\tau = \frac{F}{2I} \left(\frac{e^2}{4} - z^2 \right) = \frac{12pbx(e^2 - 4z^2)}{8be^3} = \frac{3p(e^2 - 4z^2)x}{2e^3} \quad (14.4)$$

Si $z = \pm \frac{e}{2}$, $\tau = 0$, lo que significa que a todo lo largo de las fibras superior e inferior de la viga el esfuerzo cortante es nulo.

Si $z = 0$ y $x = \ell$, el esfuerzo cortante alcanzará su valor máximo, $\tau = \frac{3p\ell}{2}$, en los extremos de la viga.

Igualmente si $x = 0$, $\tau = 0$, lo que muestra que sobre cualquier punto del plano que contiene el eje z el esfuerzo cortante es nulo.

Aplicando las ecuaciones anteriores hallamos los valores resumidos en la siguientes tablas:

A.- Haciendo variar : $0 \leq z \leq \pm \frac{e}{2}$

FIBRA	z	σ	τ
Superior	$\frac{e}{2}$	$\sigma = \frac{3p(x^2 - \ell^2)}{e^2}$	0
Neutra	0	0	$\frac{3px}{2e}$
Inferior	$-\frac{e}{2}$	$\sigma = -\frac{3p(x^2 - \ell^2)}{e^2}$	0

B.- Haciendo variar: $-\ell \leq x \leq \ell$

FIBRAS	Tensiones	$x = 0$	$x = \ell$
Fibra superior	σ	$\frac{3p\ell^2}{e^2}$	0
Fibra superior	τ	0	0
Fibra inferior	σ	$-\frac{3p\ell^2}{e^2}$	0
Fibra inferior	τ	0	0
Fibra neutra	σ	0	0
Fibra neutra	τ	0	$\frac{3p\ell}{2e}$

III.2.4.- ECUACION DE EQUILIBRIO O ROTURA DE LA VIGA.

Puesto que se conoce τ y σ , se puede aplicar la ecuación I de la **Ley de Rotura**:

$$\tau_R - \sigma_R \tan \varphi = c$$

Remplazando en ella las ecuaciones (14.3) y (14.4), se obtiene:

$$\pm \frac{3p(e^2 - 4z^2)x}{2e^3} \pm \frac{6p(x^2 - \ell^2)z}{e^3} \tan \varphi = c \quad (14.5)$$

Hechas las transformaciones correspondientes se obtiene:

$$4x^2z \tan \varphi + 4z^2x - e^2x - 4\ell^2z \tan \varphi + \frac{2e^3c}{3p} = 0 \quad (14.6)$$

Expresión que corresponde a la **Ecuación de Equilibrio** de una viga simplemente apoyada en sus extremos y uniformemente cargada, que contiene los parámetros de calidad del material en que está construida, representada por c y φ , su geometría, representada por L y e y la carga externa, representada por p .

III.2.5.- RELACION ENTRE LA LUZ DE LA VIGA Y SU ESPESOR.

Puesto que la viga tiene su punto más débil en el centro de la fibra externa de la superficie inferior:

Si en (14.6): $x = 0$, $z = -\frac{e}{2}$

$$\frac{3p\ell^2}{e^2} = \frac{c}{\tan \varphi}; \text{ de donde: } \frac{L^2}{e^2} = \frac{4c}{3p \tan \varphi} \quad (14.7)$$

De la anterior ecuación se deduce que la relación de equilibrio entre la longitud y el espesor de la viga es:

$$\frac{L}{e} = 2\sqrt{\frac{c}{3p \tan \varphi}} \quad (14.8)$$

La anterior ecuación contiene la **geometría** de la viga, representada por **la luz** (L) y **el espesor** (e); la **calidad del material** de que está construida, representada por la **cohesión** (c) y el **coeficiente de fricción interna** (φ) y la **carga externa** a la que está sometida (p).

III.2.6.- FACTOR DE SEGURIDAD.

En la ecuación (14.8) la viga está en equilibrio y su Factor de Seguridad $F.S.=I$

Si el el esfuerzo de tracción calculado a que está sometida la viga es inferior a la resistencia a la tracción propia del material en que está construida, el factor de seguridad será superior a uno y la viga se encuentra estable.

Si el esfuerzo calculado es superior a la resistencia del material, el factor de seguridad será inferior a uno y la viga se romperá bajo los esfuerzos generados por la carga a que está sometida y será necesario calcular el refuerzo que se le debe colocar para restablecer el equilibrio, en caso de que la geometría sea inmodificable.

III.2.7.- ESTADO DE COLAPSO O DESTRUCCION TOTAL (CATACLASIS).

El colapso sobrevendrá cuando la superficie de falla alcance la línea neutra, es decir cuando $\sigma_R = 0$, lo cual se cumple cuando: $z = 0$ y $x = \ell$

Si se reemplaza los anteriores valores en la ecuación (14.6), se obtiene: $\frac{3p\ell}{2e} = c$

De la anterior ecuación se deduce que **la relación de colapso** entre la longitud y el espesor de la viga es:

$$\frac{L}{e} = \frac{4c}{3p} \quad (14.19)$$

:

Si denominamos Factor de Colapso a la expresión $\frac{4c}{3p}$, $\frac{L}{e} = F.C$

III.2.8.- APLICACIÓN NUMERICA.

Calcular una viga de luz $L = 2$ m, simplemente apoyada en sus extremos, construida en concreto convencional de resistencia a la compresión simple $\sigma_c = 220 \frac{k}{cm^2}$ y resistencia al corte directo de

$c = 35 \frac{k}{cm^2}$, que debe soportar una pared de altura $h = 1,50$ m, fabricada con bloques de concreto,

cuya densidad es $\rho = 3 \frac{T}{m^3}$.

III.2.8.1.- CÁLCULO DE LA CARGA

$$p = \frac{\rho h}{10} = \frac{3T(1.5)m}{10m^3} = 0,45 \frac{k}{cm^2}$$

III.2.8.2.- GRÁFICA DE ROTURA DEL CONCRETO

$$\varphi = 2(\tan^{-1} \frac{220}{35} + 45^0) = 54,7^0 \quad \sigma_{TD} = -\frac{35}{\tan 54,7^0} = -24,7 \frac{k}{cm^2}$$

Con los datos anteriores, la curva de rotura del concreto es la que aparece en la figura 22.

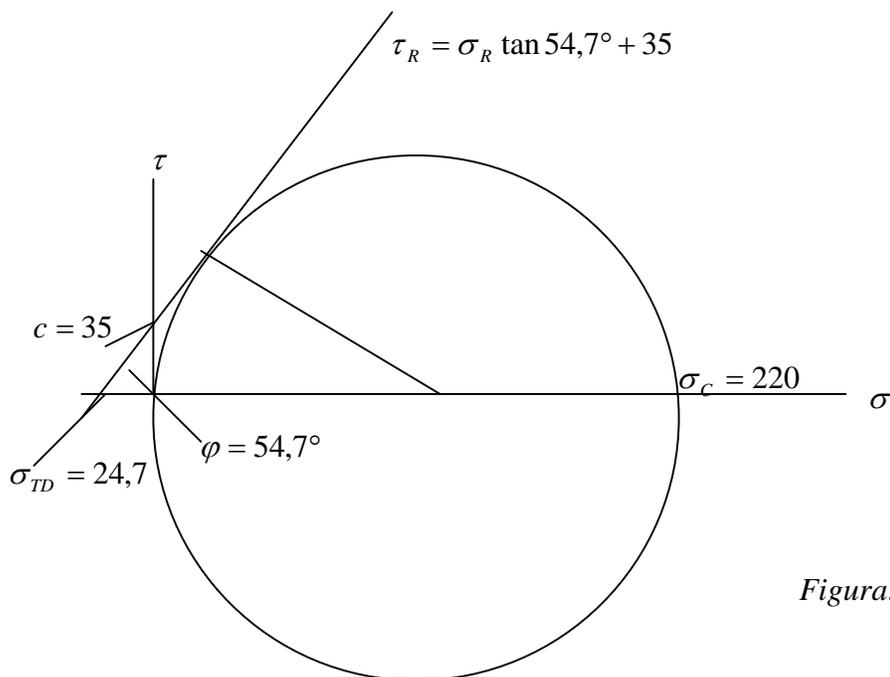


Figura...22

III-2.8.3.- FACTOR DE EQUILIBRIO:

$$F.E. = 2 \sqrt{\frac{c}{3p \tan \varphi}} = 2 \sqrt{\frac{35 \text{ k.cm}^2}{3(0,45) \text{ k.cm}^2 \tan 54,7^\circ}} = 8,57$$

III.2.8.4.- ESPESOR

$$\text{Aplicando: } \frac{L}{e} = 8,57, \text{ se obtiene: } e = \frac{200 \text{ cm}}{8,57} = 23,4 \text{ cm}$$

III.2.8.5.- FACTOR DE SEGURIDAD:

Con el espesor arriba calculado, la viga se encuentra en equilibrio y su Factor de Seguridad es 1.

III.2.8.6.- GRÁFICA DE ESTABILIDAD DE LA VIGA

- El esfuerzo máximo de tracción a que está sometido la viga en el centro de la fibra inferior, es: $\sigma = \frac{3p\ell^2}{e^2} = \frac{3(0,45)(100)^2}{(23,4)^2} = -24,7 \frac{\text{k}}{\text{cm}^2}$, que corresponde a la resistencia a tracción directa calculada para el concreto con el cual se fabricó la viga.

- El esfuerzo máximo de compresión a que está sometida la viga en el centro de la fibra superior externa, donde $\tau = 0$ y $\sigma_3 = 0$, es un esfuerzo principal mayor, σ_1 , e igual a:

$$\sigma_1 = \frac{3p\ell^2}{e^2} = \frac{3pL^2}{4} = 24,7 \frac{k}{cm^2}$$

La curva de estabilidad de la viga está representada en la Fig. 23, en la cual AD es la recta de equilibrio del concreto, AB es a la vez la resistencia del concreto a tracción directa y el esfuerzo máximo a tracción directa a que está sometida la viga y x es el círculo que representa el esfuerzo de compresión a que está sometida la viga en el punto O'' , que es el centro de la fibra superior externa, en el cual el Factor de Seguridad es:

$$F.S = \frac{220}{24,7} = 8,9, \text{ lo que indica que cuando la viga está a punto de romper por tracción aún está}$$

muy lejos de hacerlo por compresión y su estado, por este concepto es más que estable.

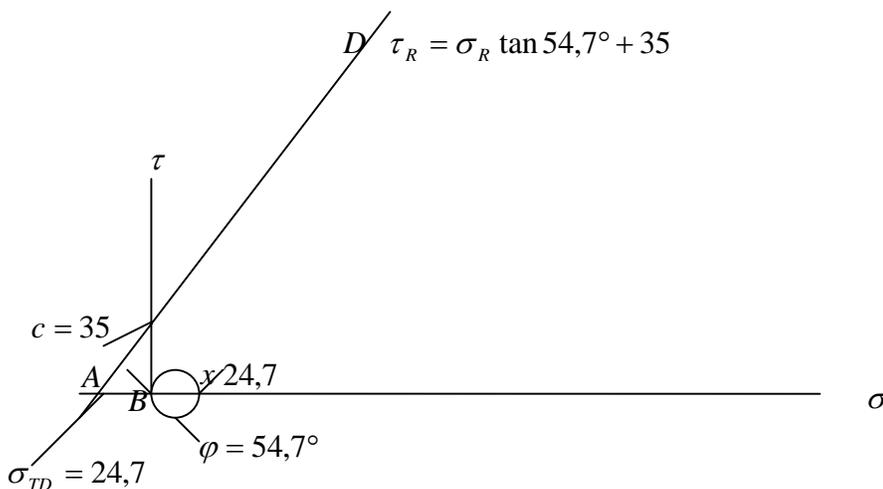


Figura...23

III.2.8.7.- ROTURA Y CÁLCULO DEL REFUERZO

Si, por cualquier razón, el espesor máximo de la viga debe ser de 15 cm, si las demás condiciones no cambian, el esfuerzo máximo a tracción directa a que queda sometida la viga será:

$$\sigma_{TD} = \frac{3(0,45)(100)^2}{(15)^2} = 60 \frac{k}{cm^2}$$

Para restituírle su condición de equilibrio, y llevarla nuevamente al punto A de la Fig. 23, será necesario auxiliarla con $60-24,7 = 32,6 \frac{k}{cm^2}$ en varillas de acero, por ejemplo.

III.2.8.8.- SUPERFICIE DE ROTURA

Cuando la carga que soporta la viga sin refuerzo es superior a la de equilibrio, la superficie de rotura se prolongará hasta donde se restablezca nuevamente el equilibrio.

Empleando la ecuación de equilibrio (14.5), $\pm \frac{3p(e^2 - 4z^2)x}{2e^3} \pm \frac{6p(x^2 - \ell^2)z}{e^3} \tan \varphi = c$, se deduce:

- Cuando $x = 0$, $z = -\frac{e^3 c}{6\ell^2 p \tan \varphi}$
- Cuando $z = -\frac{e}{2}$, $x = \pm \sqrt{\ell^2 - \frac{e^2 c}{3p \tan \varphi}}$

Si, en la viga calculada, la carga se sube hasta $3 \frac{k}{cm^2}$:

$$\text{Cuando } x = 0, \quad z = -\frac{(23,4)^3 (35)}{6(100)^2 \tan(54,7)^\circ} = -5,3cm ;$$

$$\text{Cuando } z = -\frac{e}{2}, \quad x = \pm \sqrt{10.000 - \frac{(23,4)^2 (35)}{3(3) \tan(54,7)^\circ}} = \pm 72cm$$

III.2.7.8.- ESTADO DE COLAPSO TOTAL

Si se conserva la viga con la geometría originalmente calculada, sin refuerzo y se aumenta la carga a que es sometida, colapsará cuando, a partir de (4.16):

$$p = \frac{4ce}{3L} = \frac{4(35)(23,4)}{3(200)} = 5,46 \frac{k}{cm^2}$$

III.3.2.- SOLICITACIONES:

Sobre un plano cualquiera normal al eje longitudinal de la viga, situado a una distancia x del centro O , actúan las siguientes solicitaciones:

- **Un Fuerza cortante** F , en kilogramos (k).

$$(15.1) \quad F = wx = pbx$$

En el centro de la viga: $x = 0$ y $F = 0$

Lo que nos indica que en el punto O el esfuerzo cortante es nulo.

- **Un Momento flector** M , en $k.cm.$

$$(15.2) \quad M = \pm \frac{w}{6}(3x^2 - \ell^2) = \pm \frac{pb}{6}(3x^2 - \ell^2)$$

Cuando $M = 0$, en los puntos A y A' : $x = \sqrt{\frac{1}{3}}\ell$

Lo que indica que en estos puntos situados a esta distancia del centro son puntos de inflexión y el momento cambia de signo y este tipo de viga tres ejes neutros, como se muestra en la FIG. 24.

En el centro de la viga: $x = 0$

$$M = \pm \frac{w\ell^2}{6} = \pm \frac{pb\ell^2}{6}$$

En los empotramientos: $x = \pm \ell$

$$M = \pm \frac{w\ell^2}{3} = \pm \frac{pb\ell^2}{3}$$

En una viga de estas características la porción entre el eje neutro y la fibra externa superior trabaja a compresión entre los ejes OZ y AA' y a tracción entre éste y el empotramiento, en tanto que la porción entre el eje neutro y la fibra externa inferior lo hace a tracción entre los ejes OZ y AA' y a compresión entre éste y el empotramiento.

III.3.3.- ESFUERZOS.

Las solicitaciones antes enumeradas y descritas, generan al interior de la viga y sobre una cara cualquiera normal a su eje longitudinal dos tipos de tensiones, así:

- **Normales**, originadas por el momento flector M , cuyas magnitudes son:

$$15.3) \quad \sigma = \frac{Mz}{I} = \frac{12pb(3x^2 - \ell^2)z}{6be^3} = \frac{2p(3x^2 - \ell^2)z}{e^3}$$

- **Cortantes**, originadas por el fuerza cortante F, cuyas magnitudes están dadas por:

$$(15.4) \quad \tau = \frac{F}{2I} \left(\frac{e^2}{4} - z^2 \right) = \frac{12pbx}{2be^3} \left(\frac{e^2}{4} - z^2 \right) = \frac{3px(e^2 - 4z^2)}{2e^3}$$

Aplicando las ecuaciones anteriores hallamos los valores resumidos en la siguientes tablas:

A.- Haciendo variar : $0 \leq z \leq \pm \frac{e}{2}$

FIBRA	z	σ	τ
Superior	$\frac{e}{2}$	$\frac{p(3x^2 - \ell^2)}{e^2}$	0
Neutra	0	0	$\frac{3px}{2e}$
Inferior	$-\frac{e}{2}$	$-\frac{p(3x^2 - \ell^2)}{e^2}$	0

B.- Haciendo variar: $-\ell \leq x \leq \ell$

FIBRAS	Esfuerzos	$x = 0$	$x = \sqrt{\frac{1}{3}}\ell$	$x = \ell$
Fibra superior	σ	$\frac{p\ell^2}{e^2}$	0	$-\frac{2p\ell^2}{e^2}$
Fibra superior	τ	0	0	0
Fibra inferior	σ	$-\frac{p\ell^2}{e^2}$	0	$\frac{2p\ell^2}{e^2}$
Fibra inferior	τ	0	0	0
Fibra neutra	σ	0	0	0
Fibra neutra	τ	0	$\frac{\sqrt{3}p\ell}{2e}$	$\frac{3p\ell}{2e}$

III.3.4.- ECUACIÓN DE EQUILIBRIO O ROTURA DE LA VIGA.

Si aplicamos la **Ley de Rotura** correspondiente a la ecuación de equilibrio I:

$$\tau_R - \sigma_R \tan \varphi = c$$

Y remplazamos en ella los valores correspondientes, se obtiene:

$$\frac{3px(e^2 - 4z^2)}{2e^3} - \frac{2p(3x^2 - \ell^2)z}{e^3} \tan \varphi = c$$

$$4x^2z \tan \varphi + 4z^2x - e^2x - 4\ell^2z \tan \varphi + \frac{2e^3c}{3p} = 0 \quad (15.5)$$

Ecuación que corresponde a la **Superficie de Equilibrio o de Falla** de una viga uniformemente cargada y empotrada en sus extremos.

III.3.5.- RELACION ENTRE LA LUZ DE LA VIGA Y SU ESPESOR.

Si se hace $x = 0$ y $z = -\frac{e}{2}$:

$$\sigma_{TD} = -\frac{p\ell^2}{e^2} = \frac{c}{\tan \varphi}$$

Si se hace $x = \ell$ y $z = \frac{e}{2}$:

$$\sigma_{TD} = -\frac{2p\ell^2}{e^2} = \frac{c}{\tan \varphi}$$

Lo cual indica que el máximo esfuerzo de tracción directa lo soporta la fibra externa superior en el punto del empotramiento.

La relación estable entre la luz de la viga y su espesor es:

$$(15.8) \quad \frac{L}{e} = \sqrt{\frac{2c}{p \tan \varphi}} = F.E = \text{Factor de Equilibrio}$$

III.3.6.- FACTOR DE SEGURIDAD

Cumpliendo esta relación, la viga quedará en su punto de equilibrio, es decir con un factor de seguridad igual a uno, $F.S.=1$.

III.3.7.- ESTADO DE COLAPSO O DESTRUCCIÓN TOTAL (CATACLASIS)

El estado de colapso sobrevendrá cuando la superficie de falla toque la línea neutra en el empotramiento, es decir cuando $\sigma_R = 0$, $z = 0$ y $x = \ell$.

Valores que aplicados a la ecuación I de equilibrio: $\tau_R - \sigma_R \tan \varphi = c$, dan como resultado:

$p = \frac{2ec}{3\ell}$, siendo este último valor la carga a la cual se debe someter la viga para llevarla al colapso.

III.3.8.- APLICACIÓN NUMERICA.

Si tomamos todas las condiciones del ejemplo de la viga uniformemente cargada y simplemente apoyada en la cual, construida en concreto:

$$L = 2\text{m} ; \sigma_c = 220 \frac{k}{\text{cm}^2} ; c = 35 \frac{k}{\text{cm}^2} ; p = 0,45 \frac{k}{\text{cm}^2} ; \varphi = 54,7^\circ ; \sigma_{TD} = -24,7 \frac{k}{\text{cm}^2}$$

III.3.8.1 GRÁFICA DE ROTURA DEL CONCRETO

Es igual a la de la Fig. 22

III.3.8.2 FACTOR DE EQUILIBRIO

$$FE = 2 \sqrt{\frac{c}{2p \tan \varphi}} = 2 \sqrt{\frac{(35)}{2(0,45) \tan 54,7^\circ}} = 10,5$$

III.3.8.3.- ESPESOR

$$\frac{L}{e} = \frac{200}{e} = 10,5 \quad \text{y} \quad e = 19,1\text{cm}$$

Este resultado indica que el espesor de la viga empotrada es el 81,6% de la simplemente apoyada, si ambas son construidas con el mismo material, tienen la misma luz y son sometidas a la misma carga.

III.3.8.4.- FACTOR DE SEGURIDAD

Con el espesor calculado, la viga se encuentra en equilibrio y su Factor de Seguridad es 1.

III.3.8.5.- GRÁFICA DE ESTABILIDAD DE LA VIGA

III.3.8.5.1.- El esfuerzo máximo de tracción directa a que está sometida la viga es:

- En el centro de la fibra inferior: $\sigma_{TD} = -\frac{p\ell^2}{e^2} = -\frac{(0,45)(100)^2}{(19,1)^2} = -12,3 \frac{k}{\text{cm}^2}$

En este punto la viga se encuentra estable y su factor de seguridad es: $F.S = 2$

- En la fibra superior en el empotramiento: $\sigma_{TD} = -\frac{2p\ell^2}{e^2} = -\frac{2(0,45)(100)^2}{(19,1)^2} = -24,7 \frac{k}{\text{cm}^2}$

En este punto la viga se halla en equilibrio y su factor de seguridad es: $F.S = 1$

III.3.8.6.- ROTURA Y CÁLCULO DEL REFUERZO.

Si se aumenta la carga externa a $p = 1,5 \frac{k}{cm^2}$, conservando las demás condiciones, el esfuerzo máximo de tracción directa a que queda sometida la viga será:

- En el punto central de la fibra externa inferior:

$$\sigma_{TD} = -\frac{p\ell^2}{e^2} = -\frac{1,5(100)^2}{(19,1)^2} = 41,1 \frac{k}{cm^2}$$

- En su fibra superior externa en el empotramiento:

$$\sigma_{TD} = -\frac{2p\ell^2}{e^2} = \frac{2(1,5)(100)^2}{(19,1)^2} = 82,2 \frac{k}{cm^2}$$

En ambos caso se comprueba que $\tau_R - \sigma_R \tan \varphi > c(24,7 \frac{k}{cm^2})$

Para restituirle su condición de equilibrio, será necesario ayudarla con un refuerzo en varillas de acero de: $41,1 - 24,7 = 16,4 \frac{k}{cm^2}$, en el centro de la fibra inferior externa y $82,2 - 24,7 = 57,5 \frac{k}{cm^2}$, en la fibra superior externa en el empotramiento.

III.3.8.7. SUPERFICIE DE ROTURA.

Cuando la carga que soporta la viga, sin refuerzo, es superior a la de equilibrio, la superficie de rotura se prolongará hasta donde se restablezca nuevamente el equilibrio.

La ecuación de la superficie de falla será:

$$\frac{3(1,5)[(19,1)^2 - 4z^2]x}{2(19,1)^3} + \frac{2(1,5)[3x^2 - (100)^2]z}{(19,1)^3} (\tan 54,7^\circ) = 35$$

Este estado de ruptura está representado en la FIG. 22.

III.3.8.7.1.- ROTURA POR EL PLANO CENTRAL

En el punto B de la fibra inferior externa, $x = 0$; $\sigma_R = -\frac{2(1,5)[-(100)^2]z}{(19,1)^3} = \frac{35}{\tan 54,7^\circ}$

$$z = -\frac{(19,1)^3(35)}{2(100)^2 \tan 54,7^\circ} = -8,6cm; \quad a = 9,55 - 8,6 = 0,95cm$$

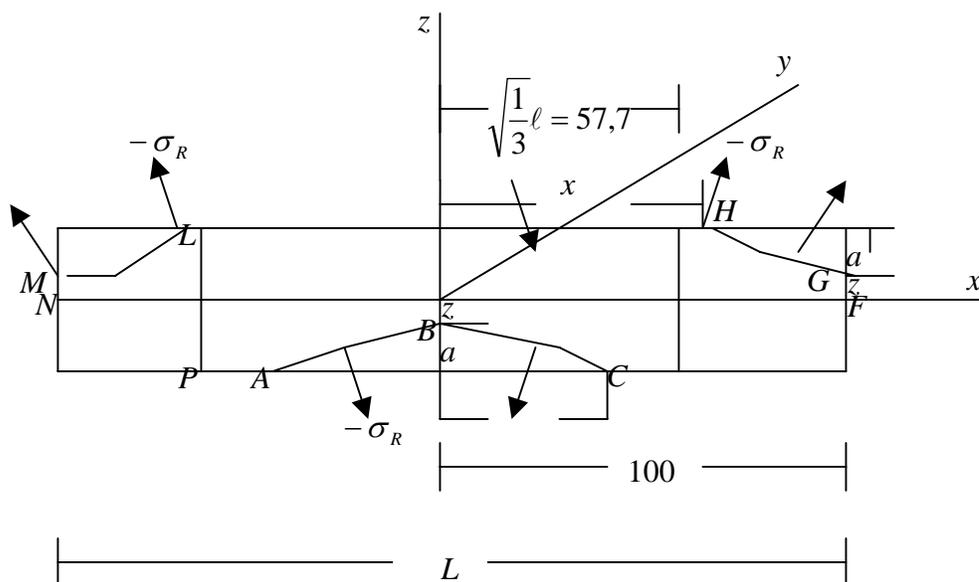


FIGURA 22 a

III.3.8.7.2- ROTURA POR LAS FIBRAS SUPERIOR E INFERIOR.

- En la zona: $0 \leq x \leq \sqrt{\frac{1}{3}}\ell$, puntos A, C.

$$\tau_R = 0, \quad z = -\frac{e}{2} \quad \text{y} \quad x = \pm \sqrt{\frac{(100)^2}{3} - \frac{(19,1^2)(35)}{3(1,5) \tan 54,7^\circ}} = \pm 36,4 \text{ cm}$$

- En la zona $\sqrt{\frac{1}{3}}\ell \leq x \leq \ell$, puntos H y L.

$$\tau_R = 0, \quad z = \pm \frac{e}{2} \quad \text{y} \quad x = \sqrt{\frac{(100)^2}{3} + \frac{(19,1)^2(35)}{3(1,5) \tan 54,7^\circ}} = \pm 85,7 \text{ cm}$$

- En los empotramientos, puntos G y M.

$$x = \pm \ell, \quad \tau = 0 \quad \sigma_R = -\frac{4p\ell^2 z}{e^3} = \frac{c}{\tan \varphi}, \quad z = \frac{35(19,1)^3}{4(1,5)(100)^2 \tan 54,7^\circ} = -2,88 \text{ cm}$$

y $a = 9,55 - 2,88 = 6,67 \text{ cm}$

IV.3.8.7.3.-ROTURA POR EL EJE NEUTRO CENTRAL, puntos F y N.

$$x = \pm \ell, z = 0 \text{ y } \sigma = 0 \quad \tau = \frac{3(1,5)200}{2(25)} = 11,8 \frac{k}{cm^2} < 35$$

La viga se halla estable en esos puntos.

Finalmente, los contornos A B C; G H, y L M, representan la superficie de rotura en el caso analizado.

IV.8.6.- ESTADO DE COLAPSO.

La carga que se necesitaría para provocar el colapso de la viga sería:

$$(15.8) \quad p = \frac{2ec}{3\ell} = \frac{2(19,1)(35)}{3(100)} = 4,46 \frac{k}{cm^2}$$

El estado de colapso está representado en la FIG. 22 b, que aparece a continuación.

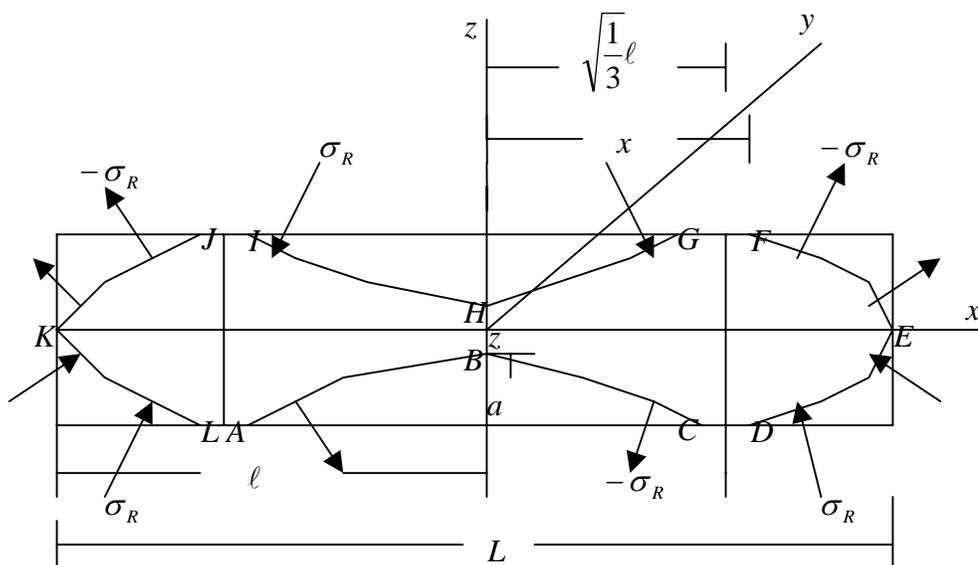


FIGURA 22 b

IV.8.7.- COMPROBACION DEL ESTADO DE COLAPSO.

Utilizando el valor de p arriba obtenido, la nueva ecuación de equilibrio será:

$$\frac{3(4.46)\{2(19,1)^2 - 4z^2\}x}{2(19,1)^3} \pm \frac{2(4.46)\{3x^2 - (100)^2\}z}{(19,1)^3} ((\tan 54,7^\circ) = 35$$

15.7.2.- ROTURA POR EL PLANO CENTRAL, puntos B y H.

$$x = 0 \quad \tau_R = 0 \quad z = \frac{35(19,1)^3}{2(4.46)(100)^2 \tan 54,7^\circ} = 1,94cm \quad a = 9.55 - 1.94 = 7,61cm$$

IV.8.8.- ROTURA POR LAS FIBRAS SUPERIOR E INFERIOR

- En la zona $0 \leq x \leq \sqrt{\frac{1}{3}}\ell$, puntos A, C, G, K.

$$\tau_R = 0, \quad z = \pm \frac{e}{2} \quad x = \pm \sqrt{\frac{(100)^2}{3} - \frac{(19,1)^2(35)}{3(4.46) \tan 54.7^\circ}} = 51,6cm$$

- En la zona $\sqrt{\frac{1}{3}}\ell \leq x \leq \ell$, en los empotramientos,

$$\tau_R = 0, \quad z = -\frac{e}{2} \quad \sigma = \frac{2p\ell^2}{e^2} = \frac{2(4,46)(100)^2}{(19,1)^2} = 244,5 \frac{k}{cm^2} > 220 \frac{k}{cm^2} (\sigma_c)$$

IV.8.9.- ROTURA POR EL EJE NEUTRO CENTRAL

En los puntos E y K.

$$z = 0, \quad \sigma = 0 \quad y \quad \ell = \frac{2(19,1)(35)}{3(4,46)} \approx 99,93cm$$

Lo que demuestra que la viga colapsa con esta carga calculada.

Finalmente, los contornos A B C, D E F, G H I, y J K L, representan la superficie de colapso en el caso analizado.

CAPITULO IV

ESTRUCTURAS SUBTERRÁNEAS

IV.1.- OBJETIVO

Indicar una metodología para el diseño y construcción de estructuras subterráneas en cualquier tipo de roca, incluidos los suelos blandos y los derrumbes, a partir de la aplicación de la LEY DE ROTURA DE LOS MATERIALES SÓLIDOS.

Se investiga en primera instancia si la estructura, sin revestir, posee suficiente capacidad portante, expresada en función de su geometría y de las características geomecánicas del material dentro del cual se ha de avanzar, que le permita soportar las cargas que le impone la masa de materiales que la suprayacen.

IV.2.- TIPOS DE ESTRUCTURAS SUBTERRÁNEAS COMUNES

Las más utilizadas son:

- Túneles circulares.
- Túneles rectangulares
- Túneles en herradura.
- Pozos verticales.

IV.3 TÚNELES CIRCULARES

IV.3.1.- ESTABILIDAD DEL TUNEL SIN REVESTIMIENTO

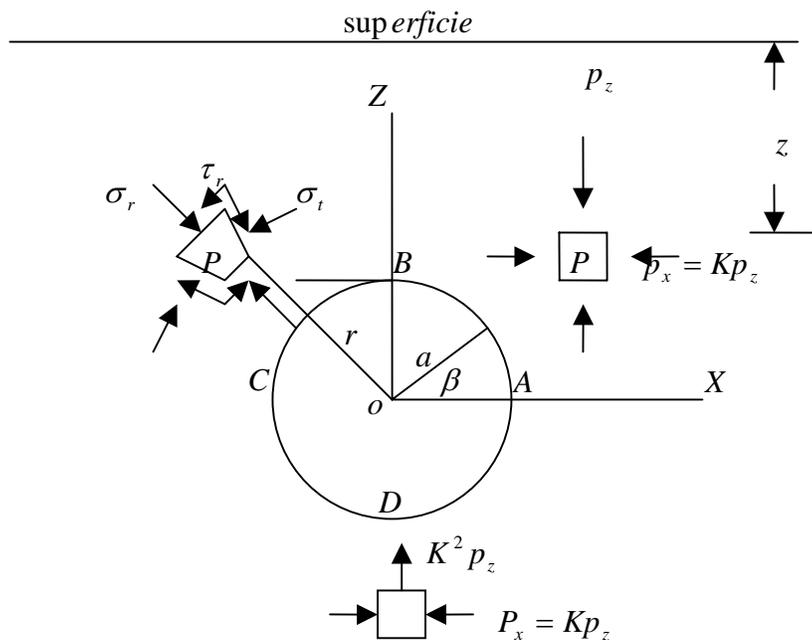


FIGURA...23

Tal como se observa en las FIGURA 4, en un punto cualquiera, P, al interior de la masa de roca que rodea el túnel, los esfuerzos a que se halla sometido, como consecuencia del peso de los materiales que están por encima suyo, están regidas por las expresiones matemáticas siguientes, tomadas de cualquier texto de Mecánica de Rocas:

$$\sigma_t = \frac{1}{2}(p_x + p_z)\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{1}{2}(p_x - p_z)\left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\beta \quad (1)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{2}(p_x + p_z)\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}(p_x - p_z)\left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\beta \quad (2)$$

$$\tau_r = \frac{1}{2}(p_z - p_x)\left(1 + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4}\right)\sen 2\beta \quad (3)$$

En las que:

σ_t = Esfuerzo tangencial; σ_r = Esfuerzo radial; τ_r = Esfuerzo radial cortante.

$$p_z = \text{Esfuerzo externo vertical} = \frac{\rho z}{10} \frac{k}{\text{cm}^2} \quad (4).$$

En donde:

ρ = densidad media de los materiales suprayacentes

z = profundidad a la que se halla el punto P

$$p_x = \text{Esfuerzo externo horizontal} = Kp_z \quad (5); \quad K = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (6)$$

$$\text{en donde } \nu = \text{coeficiente de Poisson} = \frac{\cos^2 \varphi}{2} \quad (7)$$

a = Radio de la galería; r = Distancia radial del punto P al centro del túnel

β = Ángulo que hace el radio que pasa por el punto P con el radio OA.

Cuando el punto P está sobre la periferia ABCD, $r = a$, que remplazado en (1), da como resultado:

$$\sigma_t = (p_x + p_z) - 2(p_x - p_z) \cos 2\beta \quad (9)$$

$$\sigma_r = 0 \quad \text{y} \quad \tau_r = 0$$

Lo que indica que en cualquier punto de la periferia del túnel, los esfuerzos cortante y radial que se generan son nulos.

Remplazando (5) en (9), se obtiene:

$$\sigma_t = p_z [(K + 1) - 2(K - 1) \cos 2\beta] \quad (10)$$

- En los puntos A y C: $\beta = 0$ y $\cos 2\beta = \cos 0^\circ = \cos 360^\circ = 1$.

Por tanto, al remplazar este valor y (5) en (9) y resolver, se obtiene:

$$\sigma_t = 3p_z - p_x = 3p_z - Kp_z = p_z(3 - K) \quad (11)$$

- En el puntos B: $\beta = 90^\circ$ y $\cos 2\beta = \cos 180^\circ = -1$; remplazando y resolviendo:

$$\sigma_t = 3p_x - p_z = 3Kp_z - p_z = p_z(3K - 1) \quad (12)$$

- En el punto D: $\beta = 270^\circ$, $\cos 2\beta = -1$, $p_x = K^2 p_z$ y $p_z = Kp_z$

$$\sigma_t = 3K^2 p_z - Kp_z = Kp_z(3K - 1) \quad (13)$$

IV.3.2.- SUPERFICIE DE ROTURA

La curva de rotura, que define la superficie por la cual romperá la roca que rodea el túnel, cuando los esfuerzos a que está sometida superen su resistencia, se obtiene aplicando el **criterio de rotura III**, $\sigma_1 - \sigma_3 \tan^2 \theta = \sigma_c$, ecuación en la cual σ_1 es σ_t y σ_3 es σ_r , tendrá la siguiente formulación matemática:

$$\frac{1}{2}[(p_x + p_z)(1 + \frac{a^2}{r^2}) - (p_x - p_z)(1 + 3\frac{a^4}{r^4}) \cos 2\beta -$$

$$[\frac{1}{2}(p_x + p_z)(1 - \frac{a^2}{r^2}) + (p_x - p_z)(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4}) \cos 2\beta] \tan^2 \theta = \sigma_c$$

$$(p_x + p_z)(r^4 + a^2 r^2 - r^4 + a^2 r^2) - (p_x - p_z) \cos 2\beta [r^4 + 3a^4 - (r^4 - 4a^2 r^2 + 3a^2)] \tan^2 \theta = 2\sigma_c r^2$$

$$2(K+1)a^2 r^2 - (K-1) \cos 2\beta [r^4 + 3a^4 - (r^4 + 4a^2 r^2 - 3a^2)] \tan^2 \theta = \frac{2\sigma_c r^4}{p_z}$$

Si se hace: $(K+1) = d$; $(K-1) \cos 2\beta = e$; $\tan^2 \theta = f$

$$\frac{2dr^2}{e} - r^4 - 3a^4 + fr^4 + 4a^2 fr^2 - 3a^2 f - \frac{2\sigma_c r^4}{p_z} = 0$$

$$r^4(f - \frac{2\sigma_c}{p_z} - 1) + r^2(\frac{2d}{e} - 4a^2 f) + (3a^2 f - 3a^2) = 0$$

Si se hace: $f - \frac{2\sigma_c}{p_z} = g$; $\frac{2d}{e} - 4a^2 f = h$ y $3a^2 f - 3a^2 = i$

$$gr^4 + hr^2 + i = 0$$

Si se hace: $\frac{h}{g} = j$; $\frac{i}{g} = \ell$ y $r^2 = X$: $X^2 + jX + \ell = 0$

Resolviendo, se obtiene: $X = \frac{-j \pm \sqrt{j^2 - 4\ell}}{2}$

IV.3.3.- TUNEL EN ROCA ÚNICA

Se desea construir un túnel circular de 3 m de diámetro, a una profundidad de 200 m, dentro de una lutita recubierta por una serie de estratos con formadas por areniscas y lutitas intercaladas, cuya densidad media es de $2,8 \frac{T}{m^3}$, resistencia a la compresión simple de $200 \frac{k}{cm^2}$ y resistencia al corte directo de $45 \frac{k}{cm^2}$, averiguar su estabilidad.

IV.3.3.1.- GRÁFICA DE ESTABILIDAD DE LA LUTITA

Los parámetros restantes de la lutita serán:

$$\varphi = 2[\tan^{-1}(\frac{100}{45}) - 45^\circ] = 41,5^\circ; \quad \nu = \frac{\cos^2 41,5^\circ}{2} = 0,28; \quad K = \frac{0,28}{1-0,28} = 0,39$$

La curva de resistencia de la lutita será: $\tau_R = \sigma_R \tan 41,5^\circ + 45$

IV.3.3.2.- CÁLCULO DE LA ESTABILIDAD DEL TÚNEL SIN REVESTIMIENTO

$$p_z = \frac{\rho h}{10} = \frac{2,8(200)}{10} = 56 \frac{k}{cm^2}$$

Los esfuerzos que se generarán en la periferia serán:

- En los puntos A y C:

$$\sigma_t = 3p_z - p_x = 3p_z - Kp_z = p_z(3 - K) = 56(3 - 0,39) = 146,2 \frac{k}{cm^2} < 200 \frac{k}{cm^2}$$

- En el punto B

$$\sigma_t = 3p_x - p_z = 3Kp_z - p_z = p_z(3K - 1) = 56[3(0,39) - 1] = 9,5 \frac{k}{cm^2} < 200 \frac{k}{cm^2}$$

- En el punto D

$$\sigma_t = 3K^2 p_z - Kp_z = Kp_z(3K - 1) = 0,39(56)(3K - 1) = 3,7 \frac{k}{cm^2} < 200 \frac{k}{cm^2}$$

Los cálculos anteriores arrojan los siguientes factores de seguridad:

$$\text{En A y C: } \frac{200}{146,2} = 1,38; \quad \text{en B: } \frac{200}{9,5} = 21 \quad \text{y en D: } \frac{200}{3,7} = 54$$

Lo cual indica que este túnel no requeriría revestimiento de ninguna naturaleza, mientras las características geomecánicas de la roca no se alteren.

IV.3.3.3.- ESTADO DE ROTURA

La profundidad a partir de la cual el túnel comienza a fallar en los puntos A y C, será:

$$\sigma_t = p_z(3 - K) = 200 \frac{k}{cm^2}; \quad p_z = \frac{200}{2,61} = \frac{\rho h}{10}; \quad h = \frac{2000}{2,61(2,8)} = 273,7m$$

IV.3.3.4.- CÁLCULO DEL REVESTIMIENTO

En caso de que la profundidad supere el anterior valor, y que por ejemplo sea de 500 m, según lo establecido en el ensayo triaxial, el empuje que deban recibir los puntos críticos, desde el interior del túnel, estará dado por:

$$\sigma_t - \sigma_r \tan^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \sigma_c, \text{ de donde, } \sigma_r = \frac{\sigma_t - \sigma_c}{\tan^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}$$

- Para los puntos A y C:

$$p_z = \frac{2,8(500)}{10} = 122 \frac{k}{cm^2}; \quad \sigma_t = 122(3 - 0,39) = 3.18,4 \frac{k}{cm^2} \text{ y } \sigma_r = \frac{318,4 - 200}{\tan^2 65,75^\circ} = 29 \frac{k}{cm^2}$$

- Para el punto B:

$$\sigma_t = 122[3(0,39) - 1] = 207,4 \frac{k}{cm^2}; \quad \sigma_r = \frac{207 - 200}{\tan 65,75^\circ} = 3,4 \frac{k}{cm^2}$$

- Para el punto D

$$\sigma_t = 0,39(122)[3(0,39) - 1] = 124,2 \frac{k}{cm^2} < 200 \frac{k}{cm^2}, \text{ no se necesita revestimiento.}$$

IV.4.- TÚNELES RECTANGULARES

IV.4.1.- EN ESTRATOS HOIZONTALE

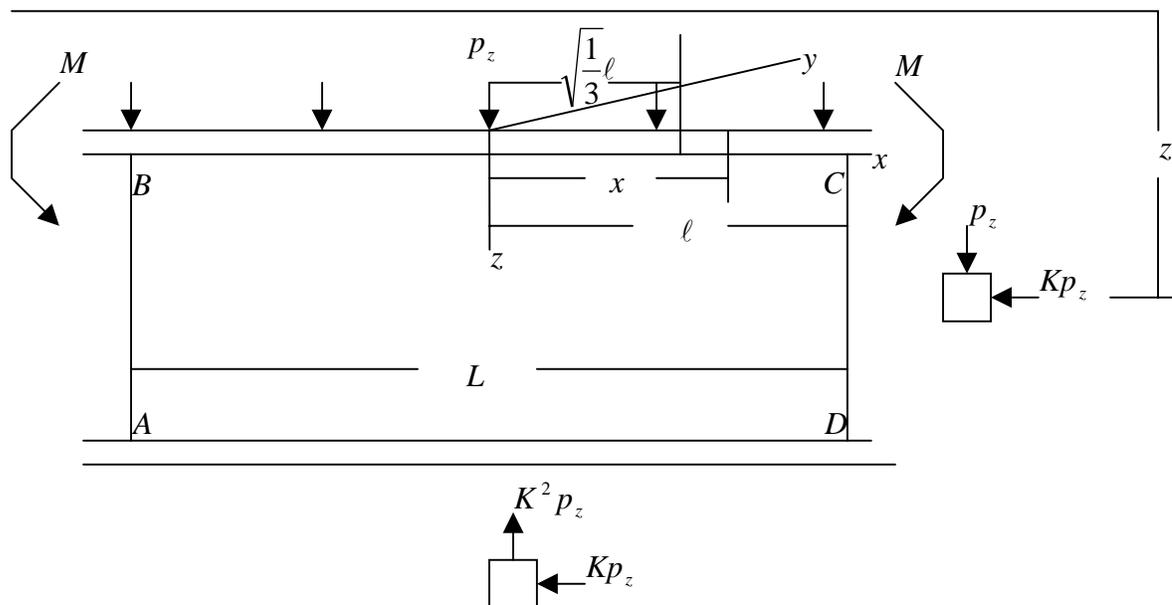


FIGURA...24

Para acercarse a la solución al problema planteado en la Fig. 24, se ha hecho una analogía con el caso de la viga uniformemente cargada y empotrada en los extremos y aplicarle los resultados al análisis de los respaldos superior BC e inferior AD , tal como aparecen a continuación:

IV.4.1.1.- RELACION ENTRE EL ANCHO DEL TÚNEL Y EL ESPESOR DEL ESTRATO

IV.4.1.1.1.- EN EL RESPALDO SUPERIOR

$$\frac{L}{e} = \sqrt{\frac{2c}{p_z \tan \varphi}}$$

IV.4.1.1.2.- EN EL RESPALDO INFERIOR

$$\frac{L}{e} = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{2c}{p_z \tan \varphi}}$$

IV.4.1.2.- SUPERFICIE DE ROTURA

IV.4.1.2.1.- EN EL RESPALDO SUPERIOR

$$\frac{3p_z x(e^2 - 4z^2)}{2e^3} - \frac{2p_z(3x^2 - \ell^2)z}{e^3} \tan \varphi = c$$

$$4x^2 z \tan \varphi + 4z^2 x - e^2 x - 4\ell^2 z \tan \varphi + \frac{2e^3 c}{3p_z} = 0$$

IV.4.1.2.2.-EN EL RESPALDO INFERIOR

$$\frac{3K^2 p_z x(e^2 - 4z^2)}{2e^3} - \frac{2K^2 p_z(3x^2 - \ell^2)z}{e^3} \tan \varphi = c$$

$$4x^2 z \tan \varphi + 4z^2 x - e^2 x - 4\ell^2 z \tan \varphi + \frac{2e^3 c}{3K^2 p_z} = 0$$

Tal como se observa en la ecuación de equilibrio, éste depende del coeficiente de Poisson de la roca que conforma el estrato que sirve de piso en el ejemplo propuesto de tal manera que si tal coeficiente es muy próximo a 0,5, es posible que el túnel falle por el piso.

IV.4.1.3.- ESTADO DE COLAPSO O DESTRUCCIÓN TOTAL (CATACLASIS)

IV.4.1.3.1.-EN EL RESPALDO SUPERIOR

$$p_z = \frac{2ec}{3\ell}$$

IV.4.1.3.2.-EN EL RESPALDO INFERIOR

$$p_z = \frac{2ec}{3K^2 \ell}$$

IV.4.2.- TÚNELES RECTANGULARES EN ESTRATOS INCLINADOS

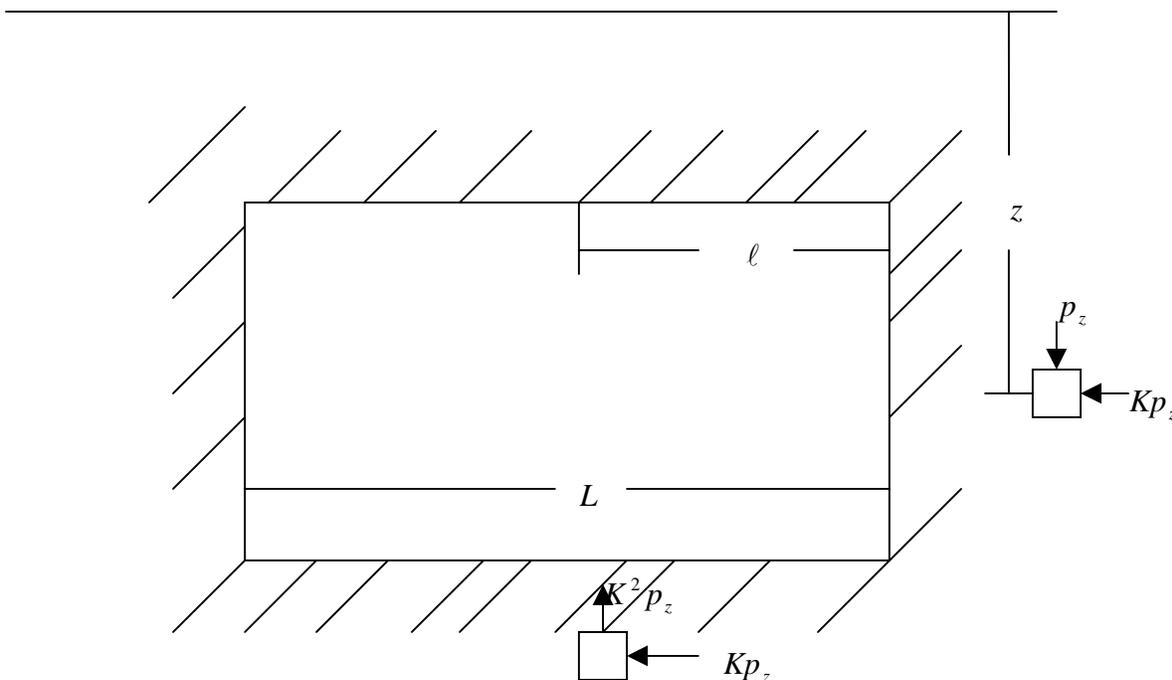


FIGURA...25

Para averiguar la estabilidad del túnel, tal como se muestra en la Fig. 25, se revisará el equilibrio de cada uno de los estratos en su periferia, bajo los siguientes supuestos:

- 1.- Cada capa se comporta como una viga, en voladizo, uniformemente cargada, empotrada en el macizo rocoso.
- 2.- La carga externa p que actúa sobre cada estrato varía según la posición que éste ocupe, así, por ejemplo:

En el techo y en el hastial izquierdo: $p = p_1 + p_2 = p_z \cos \alpha + Kp_z \operatorname{sen} \alpha = p_z (\cos \alpha + K \operatorname{sen} \alpha)$, tendiendo a romper por tracción directa, en tanto que en el hastial izquierdo romperá por compresión y en el piso, por los esfuerzos a que son sometidos, sólo romperán los que tengan un coeficiente de Poisson próximos a 0,5.

IV.5.- TÚNELES EN HERRADURA

Para su análisis se les considera como una combinación entre uno circular en su porción superior y otro rectangular en su porción inferior, conservando en cada porción los resultados obtenidos en los respectivos túneles ya analizados.

IV.6.- TÚNELSE EN MATERIALES BLANDOS Y DERRUMBES

En este caso particular, la masa rocosa en que se debe construir la estructura subterránea posee coeficiente de fricción interna y cohesión muy bajos, en el caso de las arcillas de la sabana o sólo coeficiente fricción como en el caso de los derrumbes constituidos por material granular.

En ambos casos, si el túnel se construye por el método de avance convencional, es necesario poner un sostenimiento provisional que permita remover los escombros de manera segura para poder colocar a continuación el revestimiento definitivo, a medida que se va avanzando.

IV.6.1 CÁLCULO DE LA CARGA SOBRE EL SOSTENIMIENTO PROVISIONAL

Para ello es necesario averiguar la carga externa que ha de soportar el sostenimiento provisional que normalmente es una sombrilla conformada por barras de acero que se hincan dentro de la masa rocosa a una distancia a partir del frente de avance que permita trabajar sin peligro, averiguación que se hace a partir de la gráfica que aparece a continuación.

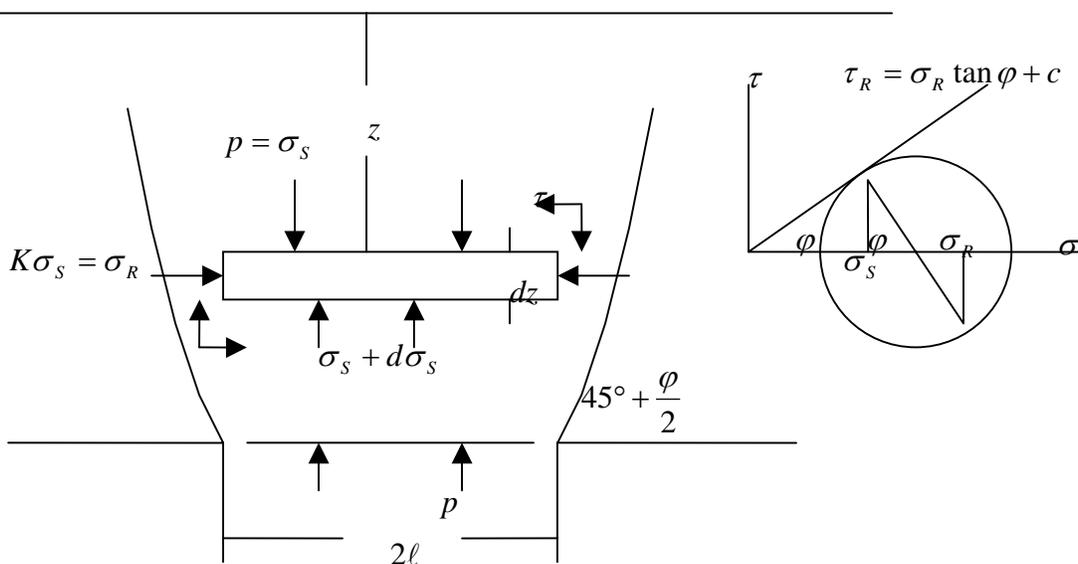


FIGURA...26

El análisis matemático del diferencial $2ldz$, conduce a:

$$\Sigma F_V = dW + 2\ell\sigma_s - 2\ell(\sigma_s + d\sigma_s) - 2\tau dz = 0$$

Haciendo las transformaciones se obtiene: $\frac{d\sigma_s}{dz} = \rho - \frac{\tau}{\ell}$

Puesto que la masa rocosa carece de resistencia al corte directo o es casi nulo

$$\tau_R = \sigma_R \tan \varphi = K\sigma_s \tan \varphi, \quad \frac{d\sigma_s}{dz} = \rho - \frac{K\sigma_s \tan \varphi}{\ell}, \quad \text{de donde: } \sigma_s = \frac{\ell\rho}{K} \left[1 - e\left(-\frac{Kz \tan \varphi}{\ell}\right) \right]$$

IV.6.2 CÁLCULO DE LA SOMBRILLA

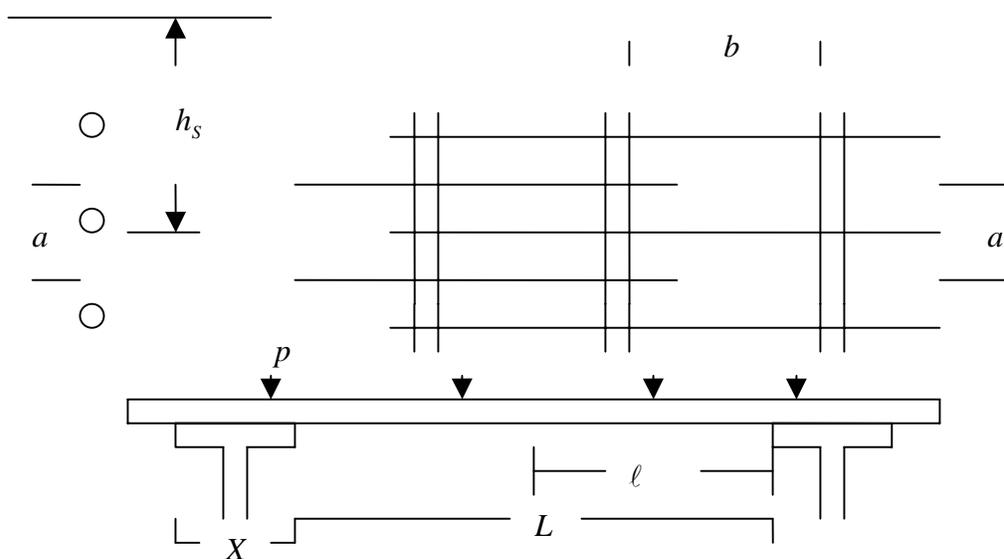


FIGURA..27

Si el sostenimiento definitivo consiste en la postura de arcos metálicos cada 0,50 m, una buena protección provisional es una sombrilla, construida con varillas de acero de 2,54cm de diámetro y 2,00m de largo, hincadas por un extremo bien aguzado, siguiendo la periferia del túnel, tal como se muestra en la FIGURA 27.

El esfuerzo a se hallará sometida la varilla de la corona en su fibra exterior :

$$\sigma_{TD} = -\frac{3p\ell^2}{e^2} = -4225 \frac{k}{cm^2}$$

En donde: σ_{TD} = resistencia del acero a tracción directa en $\frac{k}{cm^2}$, $e=2,54cm$, $\ell = 50cm$ y $p = \frac{\sigma_s ab}{eb}$ y al remplazar, se obtiene: $\frac{3\sigma_s a \ell^2}{e^3} = 4225$, de donde: $a = \frac{42250e^3}{3\sigma_s \ell^2}$

IV.7 POZOS VERTICALES

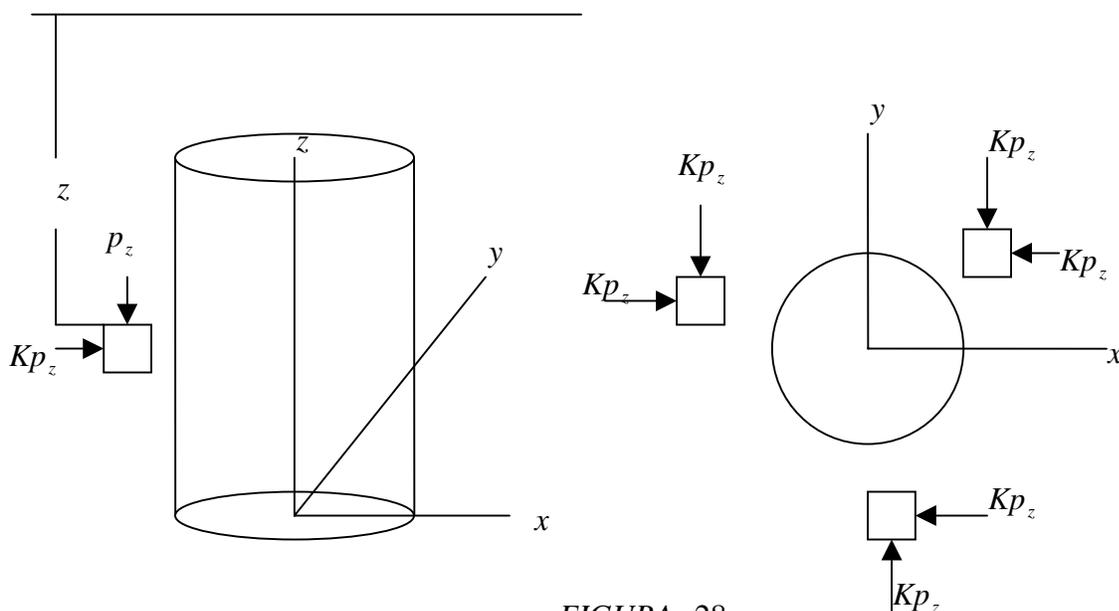


FIGURA...28

IV.7.1 CÁLCULO DE LA ESTABILIDAD SIN REVESTIMIENTO

IV.7.1.1 POZO CONSTRUIDO EN UNA SOLA ROCA

En el análisis de la estabilidad de un túnel circular se halló que en su periferia se cumple la siguiente ecuación:

$$\sigma_t = (p_x + p_y) - 2(p_x - p_y) \cos 2\beta$$

En el caso de un pozo vertical: $p_x = p_y = Kp_z$

Por consiguiente: $\sigma_t = 2Kp_z = 2K \frac{\rho h}{10} = \sigma_c$

La profundidad a la cual empieza a fallar será: $h = \frac{10\sigma_c}{2K\rho}$

IV.7.1.2 POZO CONSTRUIDO ATRAVESANDO MÚLTIPLES ESTRATOS

Puesto que σ_c y K varían con cada estrato, la profundidad a la cual falle dependerá de cada estrato en particular, siguiendo la ecuación anterior.

IV.8 FALLAS GEOLÓGICAS Y CUANTIFICACION DE SU INFLUENCIA SOBRE LAS ESTRUCTURAS SUBTERRANEAS.

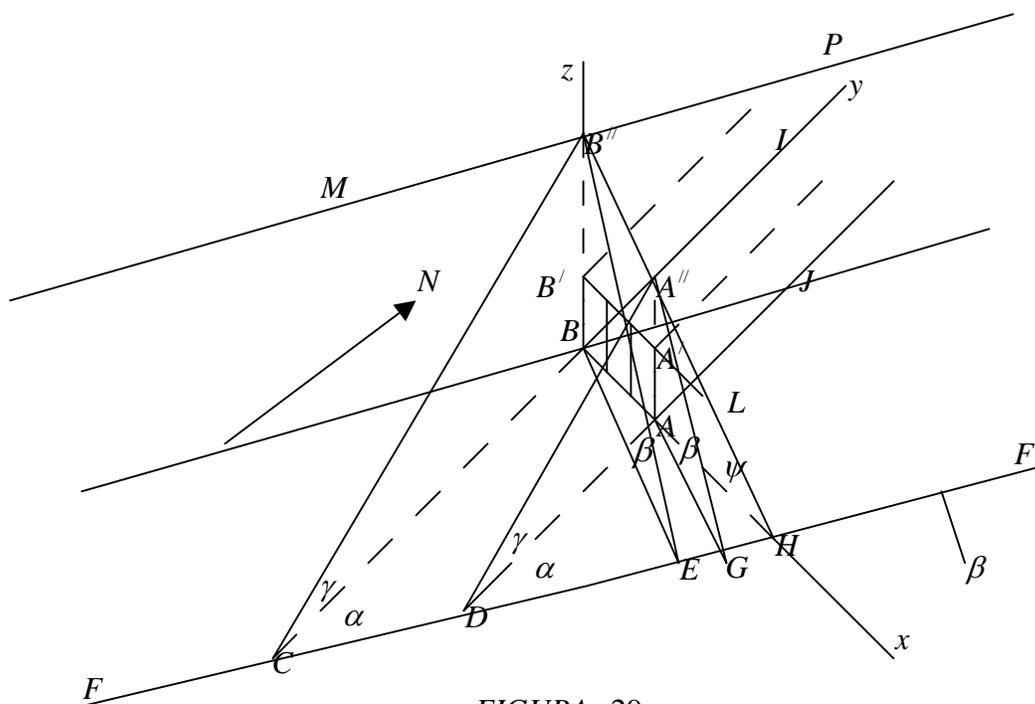
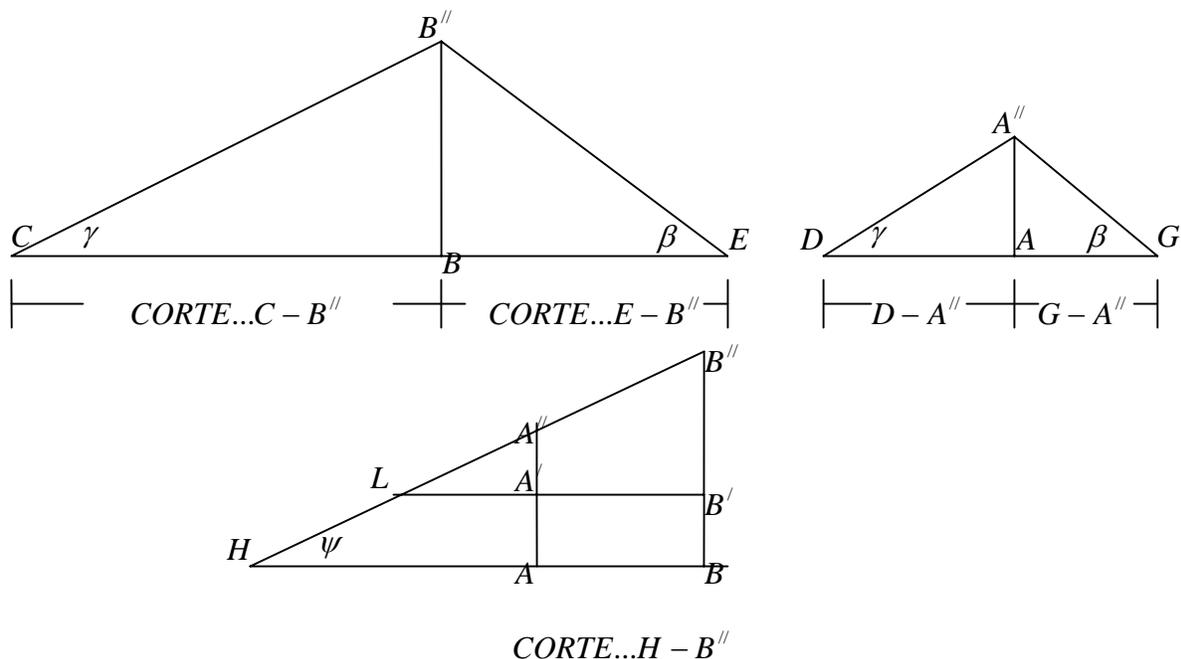


FIGURA...29

REPRESENTACION ISOMETRICA DEL SISTEMA FALLA-VIA SUBTERRÁNEA



IV.8.1 CONDICIONES GENERALES

La FIG. 28 contiene la representación del sistema falla- vía subterránea, que interactúan, en la cual:

- $IBCD AJ$: vía subterránea, cuya dirección de avance es N-S.
- $BB' A' A$: sección transversal del frontón de la vía (normal a su dirección).
- $CMB'' PH$: plano de la falla, con dirección FF' , $N - \alpha - E$ y buzamiento es $S - \beta - E$.
- $B'' C$: traza del hastial $CBI B'$ con el plano de la falla.
- $A'' D$: traza del hastial $DAJ A'$ con el plano de la falla.
- $B'' E$ y $A'' G$: líneas del buzamiento del plano de la falla.
- $B'' H$: trazas del plano del frontón con el plano de la falla.
- γ : pendiente de las trazas $B'' C$ y $A'' D$.
- α : ángulo e la traza de la falla con la dirección de la vía.
- β : Buzamiento del plano de la falla.
- ψ : pendiente de la traza del plano del frontón de la vía con el plano de la falla.

IV.8.2 CALCULO DE LOS VALORES DE γ y ψ .

De la representación isométrica y de los cortes de la FIG. 29 se obtiene:

$$\tan \beta = \frac{B'' B}{BE} = \frac{A'' A}{AG}; \quad \text{y} \quad \tan \gamma = \frac{B'' B}{BC} = \frac{A'' A}{AD}$$

$$B'' B = A'' A = BE \tan \beta = AG \tan \beta, \quad \text{también,} \quad B'' B = A'' A = BC \tan \gamma = AD \tan \gamma$$

Igualando se obtiene: $BE \tan \beta = BC \tan \gamma$ y $AG \tan \beta = AD \tan \gamma$

Por consiguiente: $\frac{BE}{BC} = \frac{AG}{AD} = \frac{\tan \gamma}{\tan \beta}$

Por otro lado: $\text{sen} \alpha = \frac{BE}{BC} = \frac{AG}{AD} = \frac{\tan \gamma}{\tan \beta}$, de donde: $\tan \gamma = \text{sen} \alpha \tan \beta$, y:

$$\gamma = \tan^{-1}(\text{sen} \alpha \tan \beta)$$

Por otra parte, también: $B''B = BH \tan \psi$ y $A''A = AH \tan \psi$

Por consiguiente: $BH = \frac{B''B}{\tan \psi} = BC \tan \alpha$, y $AH = \frac{A''A}{\tan \psi} = AD \tan \alpha$

De donde: $\frac{B''B}{BC} = \frac{A''A}{AD} = \tan \psi \tan \alpha = \tan \gamma$ y $\tan \psi = \frac{\tan \gamma}{\tan \alpha} = \frac{\text{sen} \alpha \tan \beta}{\tan \alpha} = \cos \alpha \tan \beta$

Por tanto: $\psi = \tan^{-1}(\cos \alpha \tan \beta)$

IV.8.3 EFECTOS MECÁNICOS CUANTITATIVOS DE LA FALLA SOBRE LA VÍA

En el corte $H - B''$ de la figura 29 se ve que la falla, respecto a la vía delimita:

- En el techo, una viga trapezoidal $A'A''B''B'$, uniformemente cargada y empotrada en sus extremos $A'A''$ y $B'B''$.
- En el hastial izquierdo, un pilar trapezoidal $HAA'L$.

IV.8.4.- CÁLCULO DE LOS EFECTOS MECÁNICOS SOBRE LA VIGA.

