MODULO DE REACCION DE SUBRASANTE EN CIMENTACIONES SUPERFICIALES

ALVARO J. GONZALEZ G.

Ingeniero Civil U.N., M.Sc., DIC
Socio Director- Análisis Geotécnicos Colombianos AGC Ltda.
Profesor Asociado -Fac.de Ingeniería- U.Nacional.- Bogotá

1.0 INTRODUCCION

Con el fin de estimar adecuadamente los esfuerzos máximos a que estarán sometidos elementos estructurales en contacto continuo con materiales térreos, tales como pavimentos, cimientos, traviesas de ferrocarril, etc, se requiere conocer la deformabilidad de la estructura térrea, ante la acción de las cargas impuestas.

2.0 CONCEPTO DEL MODULO DE REACCION DE SUBRASANTE (k)

El módulo de reacción de subrasante k [F/L^3], se define como:

$$k = \sigma / \delta \tag{1}$$

en donde σ = esfuerzo normal
δ = deformación en la dirección de σ.

El objetivo de este parámetro es el de reemplazar una masa de suelo por resortes elásticos equivalentes, con una constante k por unidad de área, lo que realmente es una conveniencia matemática que facilita los cálculos de esfuerzos y deformaciones en las interfaces estructura-suelo, puesto que las deformaciones se hacen directamente proporcionales a los esfuerzos aplicados.

El concepto fué introducido por Winkler, y posteriormente desarrollado, discutido y usado por la profesión. Dado que, como se demostrará posteriormente, este parámetro no es una propiedad intrínseca del suelo, hay múltiples modelos para su evaluación y no es posible determinarlo unívocamente con ensayos normalizados.

En los siguientes apartes se hace una revisión sucinta de algunos de los modelos más usuales, y, debido al carácter del módulo de reacción, necesariamente los modelos se basan en la teoría de la elasticidad. Se consideran cargas verticales únicamente.

3.0 MEDIO SEMI-INFINITO HOMOGENEO

Para este caso ideal hay varias soluciones explícitas, ya evaluadas hace años.

3.1 Area Circular

Para un área circular de radio R, con una carga superficial uniforme q, las deformaciones verticales δ y el módulo de reacción k están dados por:

$$\delta = [q*R*Ic] * [(1-v^2) / E] \tag{2}$$

$$k = q/\delta = [E / (1-v^2)] / [R*Ic] \tag{3}$$

en donde δ = deflexión vertical superficial [L]
q = carga vertical por unidad de área [F/L^2]
E = módulo elástico del suelo [F/L^2]
v = relación de Poisson del suelo
Ic= factor de influencia para carga circular
=Icf= factor de influencia para carga circular flexible (p.ej. Das, 1985)
= 2.000 para el centro
= 1.273 para el borde
= 1.700 para la deflexión promedio
=Icr= factor de influencia para carga circular rígida
= $\pi/2$ = 1.571 (Poulos y Davis, 1974)

3.2.- Area Rectangular

Para esta forma, con dimensiones B (ancho) por L (largo) y con una carga unitaria q, las deformaciones superficiales están dadas por:

$$\delta = [q*B*Ir] * [(1-v^2) / E] \tag{4}$$

y entonces

$$k = q/\delta = [E / (1-v^2)] / [B*Ir] \tag{5}$$

en donde δ = deflexión vertical superficial [L]
q = carga vertical por unidad de área [F/L^2]
E = módulo elástico del suelo [F/L^2]
v = relación de Poisson del suelo
Ir = factor de influencia para carga rectangular
=Irf= factor de influencia - carga rectangular flexible (Steinbrenner, 1934; en p.ej. Bowles, 1982)
= 2*F1o para el centro
= F1o para la esquina
= 1.696*F1o en promedio

$$F1o = (1/2\pi)\{\ln [(X + m) / (X - m)] + m*\ln [(X + 1) / (X - 1)]\} \tag{6a}$$
$$X = (1 + m^2)^{(1/2)} \tag{6b}$$
$$m = L/B \tag{6c}$$

=Irr = factor de influencia - carga rectangular rígida

$$Irr = [m^{(1/2)}] / T(m) \text{ (Poulos y Davis, 1974)} \tag{7}$$

T(m)= función de m = L/B con T > 1.0

3.3.- Análisis Inicial

De los anteriores dos casos elementales se deducen cuatro conclusiones iniciales interesantes:

a) k es función de las propiedades elásticas del suelo (E,v), como era de esperarse.

b) k varía inversamente de las dimensiones de la zona cargada (R, B y L), hecho ya observado por Terzaghi (1955).

c) k depende de la rigidez relativa entre la estructura y el suelo

d) k, para estructuras flexibles, depende del punto de medida de la deformación vertical.

Por todo lo anterior, y como se anunció al principio, el módulo de reacción de los suelos k no es sino un artificio de cálculo y no una propiedad fundamental del suelo, así éste sea homogéneo, isotrópico y elástico. De ahí la dificultad inherente para su evaluación, más aún cuando los suelos reales son heterogéneos, anisotrópicos e inelásticos.

3.4.- Aproximación Inicial

Sin embargo, para los dos casos anteriores, es posible obviar en parte estos inconvenientes adoptando:

1) δ = δ_f promedio para estructuras flexibles
= δ_r = para estructuras rígidas (Poulos & Davis,74)
= 1/2 [δ_f (centro) + δ_f (borde)] (círculo)
= 1/3 [2*δ_f (centro) + δ_f (esquina)](rectángulo)

2) D = dimensión menor de la estructura
= 2R para caso circular
= B para el caso rectangular

3) K = k*D = módulo de deformabilidad

Con estas aproximaciones la expresiones para K quedarían:

Círculo: $Kcf = 1.1765* [E/(1-v^2)]$ (8a)
$Kcr = 1.2221* [E/(1-v^2)]$ (8b)

Rectángulo: $Krf = [0.5896/F1o]* [E/(1-v^2)]$ (9a)
$Krr = [0.6000/F1o]* [E/(1-v^2)]$ (9b)

Dada la gran similitud de los coeficientes, para los dos casos anteriores se puede adoptar entonces:

$$Kc = I * [E/(1-v^2)] \quad (10)$$

en donde I = factor de influencia = 1.2 para círculo
= 0.6/F1o para rectángulo

Lo anterior se confirma con el análisis de Vesic (1961) para una viga infinitamente larga de base B, modulo elástico E_v e inercia I_v, caso en el cual el módulo de deformabilidad está dado por:

$$K = kB = 0.65 * [(E*B^4)/(E_v*I_v)]^{(1/12)} * [E/(1-v^2)] \quad (11)$$

la cual en la mayoría de los casos se aproxima bastante a la expresión:

$$K = (1/2)*[E/(1-v^2)] \quad (11a)$$

4.0 MEDIO SEMI-INFINITO HETEROGENEO

Para este medio en el presente informe se presentan dos casos usuales: a) variación funcional de los parámetros elásticos con profundidad y b) materiales en capas.

4.1.- Variación Funcional de Parámetros Elásticos

A) Variación Lineal

El caso de variación lineal creciente con profundidad ha sido elegantemente resuelto por Gibson (1974), para el caso en el cual los parámetros elásticos varían :

$$G(z) = G(0) + m^*z \qquad (12a)$$
$$v = \text{constante} \qquad (12b)$$

en dónde
- G = módulo de rigidez = $E/[2^*(1+v)]$ $[F/L^2]$
- v = relación de Poisson
- z = profundidad [L]
- $G(0)$ = módulo de rigidez superficial $[F/L^2]$
- m = variación de G con z (dG/dz =m >0) $[F/L^3]$

para el caso v=0.5 y G(0) = 0 y únicamente para este caso:

$$k = 2m \qquad (13)$$

y tal vez es la única ocasión en que k puede identificarse con una propiedad del material.

B) Otras Variaciones

b1) Horvath (1983a y b), usando el continuo de Reissner, el cual asume $\sigma x = \sigma y = \tau xy = 0$ y adicionando ex= ey= γxy= 0 (solo existen σz y ez), las deformaciones varian de δ en la superficie a 0 a la profundidad H, y entonces, con estas restricciones, bastante irreales en concepto del Autor, llega a las siguientes expresiones para k:

- para E = A = constante

$$k = A/H = K/H \qquad (14)$$

- para E = A + B*z

$$k = B / \ln(1 + BH/A) \qquad (15)$$

- para $E = A + B^*(z)^{0.5}$

$$k = B^2 / [B^*(H)^{0.5} - A^* \ln(1 + (B^*(H)^{0.5})/A) \qquad (16)$$

Nótese que para A=0 las expresiones (15) y (16) resultan en k = 0 (??) y para B=0 no revierten a la expresión (14).

b2) Holl (Poulos y Davis,1974) calcula esfuerzos, pero no deformaciones, para un material en el cual:

$$E = Eo^* (z)^j \qquad (17)$$

4.2.- Material por Capas

Para este caso se asume adhesión perfecta entre las capas y que éstas están dispuestas horizontalmente con espesores constantes (hi). El material de cada una de las capas se supone homogéneo, isotrópico y elástico, con parámetros Ei y vi, y la capa más inferior se supone semi-infinita.

A) Carga Circular

Para este caso y dado su interés en el caso de los pavimentos para vehículos, se han resuelto varios problemas, en especial con materiales más resistentes sobre otros más débiles.

Entre las soluciones se pueden mencionar (Poulos y Davis,1974):

a1) Dos capas :
-Burmister (esfuerzos y deformaciones)
-Fox (esfuerzos)
-Thenn de Barros (deformaciones)
-Ueshita y Meyerhof (módulo equivalente)
-Gerrard (esfuerzos y deformaciones)

a2) Tres capas :
- Jones (esfuerzos-tablas)
- Peattie (esfuerzos-gráficos)
- Ueshita y Meyerhof (deformaciones-gráficos)
- Thenn de Barros (deformaciones-tablas)

a3) Procedimientos aproximados:
- Steinbrenner (para carga rectangular)
- Palmer y Barber (espesores equivalentes)
- Odemark (módulos equivalentes-iterativo)
- Ueshita y Meyerhof (factores de medio finito)
- Vesic (factores de deformación)
- Thenn de Barros (módulos equivalentes)

Debido a lo extenso de las soluciones y a que en cimentaciones lo usual no es el problema de carga circular, aunque en ocasiones se ha empleado como elemento de carga unitaria (Chang et al., 1980), se sigue con el caso de carga rectangular, sin detallar estas soluciones de carga circular, las cuales usualmente vienen solo en tablas o gráficos.

B) Carga Rectangular

b1) Método de Steinbrenner: Este procedimiento, ya mencionado parcialmente con anterioridad, para este caso parece que es el único método aplicable, por haber sido desarrollado específicamente para esta forma de carga, aunque se anota que su efectividad es mayor cuando los módulos decrecen con profundidad y por ésto y otras razones se considera un método aproximado (Poulos y Davis,1974; Bowles, 1982). El método se puede aplicar iterativamente, y permite calcular las deformaciones de un gran número de capas:

La deformación en la esquina de un rectángulo (B x L) esta dada por:

$$\delta)\text{esq.} = [q*B*Is] / [\ E / (1-v^2)] \qquad (18a)$$

Para la deformación entre la superficie y la profundidad z

$$Is = Ish = F1 + [(1-2v) / (1-v)]*F2 \quad (19a)$$

en donde

$$F1 = (1/\pi) \{\ln [(X+m)*(Y) / (m+J)] + m*\ln [((X+1)*R)/(m(1+J))]\} \quad (19b)$$

$$F2 = (n/2\pi)*\arctan [m/(n*J)] \quad (19c)$$

y

$$X = (1 + m^2)^{(1/2)} \quad (19d)$$

$$Y = (1 + n^2)^{(1/2)} \quad (19e)$$

$$R = (m^2 + n^2)^{(1/2)} \quad (19f)$$

$$J = (m^2 + n^2 + 1)^{(1/2)} \quad (19g)$$

$$m = L/B \quad (19h)$$

$$n = z/B \quad (19i)$$

para el caso $z \Rightarrow \infty$ $F1 = F1o$ $F2 = 0$

$z = 0$ $F1 = 0$ $F2 = 0$

Para deformación entre la profundidad z e infinito se tiene:

$$Is = Isz = F3 - [(1-2v)/(1-v)]*F2 \quad (20a)$$

en donde

$$F3 = (1/\pi) * \{\ln [(m+J)/Y] + m*\ln [(1+J)/R]\} \quad (20b)$$

$$= (1/2\pi)*\{\ln[(J+m)/(J-m)] + m*\ln[(J+1)/(J-1)]\} \text{ (Harr,1966)} \quad (20b)$$

y el resto de nomenclatura es igual al caso anterior.

Para el caso $z = 0$ $F3 = F1o$ $F2 = 0$

$z \Rightarrow \infty$ $F3 = 0$ $F2 = 0$

y en todos los casos $F1 + F3 = F1o$ (21)

Para las otras deformaciones:

δ centro = 2 δ esquina (22a)

δ promedio flexible = 0.848 δ centro (22b)

δ promedio rígido = 0.833 δ centro (22c)

Con el método aplicado sucesivamente a las diferentes capas, es posible, por superposición, hallar las deformaciones superficiales y por consiguiente el módulo promedio de deformabilidad K.

b2) Métodos Aproximados

Estos se pueden aplicar en conjunto con el método anterior, para simplificar en algo los cálculos.(Poulos y Davis, 1974):

<u>Espesor Equivalente (Palmer y Barber):</u>

Las i capas superiores (de 1 hasta n) se hacen de espesor equivalente Hequiv con las características del material subyacente semiinfinito o sea:

$$Hequiv)o = \Sigma \{hi* [Ei / (1-vi^2)]^{(1/3)}\} / [Eo /(1-vo^2)]^{(1/3)} \quad (23)$$

en este caso se pueden aplicar las ecuaciones del medio semi- infinito.

Módulo equivalente (Thenn de Barros):

Con una ecuación similar, las i -1 capas superiores se colocan con su espesor total H y un módulo equivalente:

$$(E\ equiv)^{(1/3)} = d\ \{hi^*(Ei)^{(1/3)}\}/\ H \qquad (24a)$$
$$H = h1 + h2 + h3 + ...+hn \qquad (24b)$$

en este caso se aplica el modelo de dos capas.

5.0.- MEDIO FINITO HOMOGENEO

Para este caso, de una capa sobre una base rígida, rugosa y correspondiente a la situación cuando el elemento está sobre una capa delgada de suelo, hay varias soluciones, presentadas en gráficos (Poulos y Davis,1974), en especial las siguientes:

- Ueshita y Meyerhof (deformación vertical en esquina para v=0 a 0.5)
- Sovinc (esfuerzos y deformaciones en base lisa)

6.0 CONCLUSIONES GENERALES

6.1 Intervalo de Variación del Módulo de Reacción

Con este resumen de los principales métodos rápidos de cálculo de deformaciones, es posible evaluar aproximadamente el intervalo probable de variación de K para el problema de elementos circulares, cuadrados o rectangulares. Sin embargo, en todos los casos es posible aplicar modelos de elementos finitos bi y tridimensionales, los cuales pueden proveer resultados más exactos, pero cuyo costo es usualmente muy alto.

6.2.- Rigidez Relativa del Elemento Estructural

Con las dimensiones del elemento se puede aplicar el criterio de Goburnov-Possadov (Davis y Poulos, 1974; Zaman y Farouque, 1985).

Segun Goburnov-Possadov una placa rectangular sólida de dimensiones B > L, propiedades E_p y v_p, y espesor t se puede considerar rígida si:

$$[E/(1-v^2)] < (16/3\pi)^*[(B/L)^{(1/2)}]^*[(t/B)^3] * [E_p/(1-v_p{}^2)] \qquad (25)$$

y si esto es así deben adoptarse los valores de K correspondientes.

6.3- Necesidad de Observación

La instrumentación y cuidadosa observación de cimientos existentes, respaldadas por ensayos adecuados de campo contribuirán a mejorar los modelos y a reducir los usualmente amplios intervalos que indicamos los geotecnistas para éste parámetro de cálculo estructural.

REFERENCIAS

BOWLES, J.E. (1988).- Foundation Analysis and Design- 4rd. Ed.-1004 pp.- McGraw-Hill Book Co.

CHANG,CH.S.; ADEGOKE, C.W.; SELIG, E.T. (1980).- GEOTRACK Model for Railroad Track Performance.- Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 106, No. GT11, Proc. Paper 15819, November 1980, pp. 1201-1217

DAS, B.M. (1985).- Advanced Soil Mechanics.- 511 pp.- McGraw-Hill Book International Edition, 1985.

GIBSON, R.E. (1974).- The Analytical Method in Soil Mechanics- 14th Rankine Lecture.- Geotechnique 24 No. 2, pp 113-140.

HARR, M.E. (1966).- Foundations of Theoretical Soil Mechanics.- McGraw Hill Book Co.

HORVATH, J.S. (1983a).- New Subgrade Model Applied to Mat Foundations.- Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 109, No. GT12, Proc. Paper 18437, December 1983, pp. 1567-1587.

HORVATH, J.S. (1983b).- Modulus of Subgrade Reaction: New Perspective.- Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 109, No. GT12, Proc. Paper 18398, December 1983, pp.1591-1596.

POULOS, H.G.; DAVIS, E.H. (1974).- Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics.- 411 pp.- John Wiley & Sons. Inc

TERZAGHI, K. (1955).- Evaluation of Coefficients of Subgrade Reaction.- Geotechnique, Vol. 5, No. 4, pp. 1011-1043, Dec. 1955.

THOMPSON, M.R.; ROBNETT, Q.L. (1979).- Resilient Properties of Subgrade Soils.- Transportation Engineering Journal, ASCE, Vol.105 No. TE1, Proc. Paper 14293, January 1979, pp.71-89.

VESIC, A. (1961).- Bending of Beams Resting on Isotropic Elastic Solid.- Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 87, No. EM2, pp. 35-53.

ZAMAN, M.M.; FARUQUE, M.O. (1985).- A Variational Approach for the Analysis of Square and Rectangular Plates Resting in Smooth Contact with an Isotropic Elastic Halfspace.- Soils and Foundations.- Vol 25 No. 1, March, 1985, pp. 15-26